Simulazioni d’esame svolte

costituite da 2 problemi e 8 quesiti
sul modello delle prove ministeriali

Simulazione 1

PROBLEMA 1

▶ **MATEMATICA** studio di funzione, integrali
▶ **FISICA** relatività ristretta

Sia data la funzione:

$$f(x) = \frac{a}{\sqrt{b + cx^2}}$$

dove a, b e c sono parametri reali e $a \in \mathbb{R}^+$.

a. Determina l'espressione analitica della funzione affinché il suo grafico abbia un asintoto verticale di equazione $x = 1$ e abbia tangente di equazione $4\sqrt{3}\,x - 9y + 4\sqrt{3} = 0$ nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

b. Svolgi lo studio di funzione completo e determina l'area della parte di piano delimitata dal grafico della funzione, dagli assi coordinati e dall'asintoto verticale $x = 1$.

La funzione ottenuta può essere interpretata come il fattore lorentziano γ della relatività ristretta, ponendo $x = \frac{v}{c}$, dove c è la velocità delle radiazioni elettromagnetiche nel vuoto.
In un esperimento condotto in un acceleratore di particelle, un elettrone e un positrone vengono fatti collidere, scontrandosi l'uno contro l'altro, entrambi con un'energia cinetica pari al triplo di quella di riposo. Si osserva che essi scompaiono (annichilazione) lasciando il posto a 2 fotoni identici.

c. Calcola la velocità delle due particelle e dimostra che la velocità c non può essere né raggiunta, né superata da un corpo dotato di massa.

d. Determina la frequenza della radiazione elettromagnetica che si sprigiona dall'annichilazione dell'elettrone e del positrone. Spiega inoltre perché non è possibile che dall'annichilazione venga prodotto un solo fotone.

PER APPROFONDIRE

e. Calcola la quantità di moto dei fotoni ottenuti dall'annichilazione.

f. Quale fenomeno si ottiene se un fotone si scontra con un elettrone inizialmente fermo?

PROBLEMA 2

▶ **MATEMATICA** iperbole, integrali definiti
▶ **FISICA** onde e suono

a. Due treni viaggiano uno verso l'altro con la stessa velocità in valore assoluto v. Su uno di essi si trova una sorgente sonora, sull'altro un microfono. Indicando con f la frequenza emessa, f' la frequenza percepita dall'osservatore e v_M la velocità del suono nel mezzo, trova il rapporto tra le frequenze emessa e quella registrata in funzione di v e interpreta graficamente il risultato.

b. Trova come cambia il rapporto tra le frequenze se c'è vento con velocità $v/2$ nella stessa direzione della sorgente.

c. Trasla la funzione che hai trovato nel punto **a.** in modo da portare il centro di simmetria nell'origine degli assi coordinati, quindi trova la distanza tra i vertici della nuova funzione γ.

d. Fissato il valore del parametro $v_M = 8$, considera la regione di piano compresa tra il grafico di γ, l'asse delle ascisse, la retta verticale che passa per il vertice $V(x_V; y_V)$, il ramo di iperbole che si trova nel IV quadrante e la retta $x = h$, con $h > x_V$. Trova il valore di h per il quale l'area è pari a 16.

SUGGERIMENTI PER LO SVOLGIMENTO

a. Per ricordare i segni giusti nella legge dell'effetto Doppler, rifletti se la frequenza percepita è più alta o più bassa a seconda del movimento della sorgente rispetto all'osservatore e viceversa.
b. Le velocità di osservatore e sorgente vanno riferite al mezzo di propagazione.
c. Puoi trovare i vertici dell'iperbole equilatera mettendola a sistema con una bisettrice, ma dovresti conoscere già il risultato.
d. Ricorda la relazione tra area e integrale definito per funzioni che possono assumere anche valori negativi.

QUESITI

1. Determina i valori dei parametri a e b in modo tale che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} a\,e^x + b\ln(x+1) & \text{se } -1 < x \leqslant 0 \\ bx^3 + 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

sia derivabile nell'intervallo di definizione.

2. Verifica che la funzione $f(x) = x - \arctan x$ non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle in alcun intervallo $[-k, k]$ con k reale positivo ma, nonostante ciò, $f(x)$ possiede un punto stazionario nel medesimo intervallo.

3. Determina il volume di ciascuno dei due solidi ottenuti dalla rotazione completa intorno all'asse x e intorno all'asse y della parte di piano sottesa al grafico di $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, per $x \in [2, 3]$.

4. Considerata la funzione $y = p(x)$ dove $p(x)$ è un polinomio di terzo grado, stabilisci motivando esaurientemente la risposta e senza svolgere calcoli algebrici, quanti zeri, quanti punti stazionari e quanti flessi può ammettere al massimo la funzione.

5. La stella nana US708, che si trova nell'Orsa Maggiore, sta sfuggendo dal centro della Via Lattea con una velocità $v_1 = 1200$ km/s. Un'altra stella, HVS7, sfugge anch'essa dal centro della Via Lattea con velocità $v_2 = 518$ km/s. Considerando le due velocità parallele, calcola la velocità di HVS7 nel sistema di riferimento di US708, sia nel limite classico sia con le trasformazioni della relatività ristretta.

6. Un dispositivo Bluetooth in classe 2 (cioè con portata di 40 m) ha una potenza di trasmissione massima $P = 0{,}8$ mW. Determina il valore del campo elettrico a una distanza $d = 50$ cm.

7. Un cavo coassiale internamente vuoto, di lunghezza infinita e raggio $r = 3$ mm, ha una densità lineare di carica $\lambda = 2{,}2$ nC/m. Determina e rappresenta graficamente il campo elettrico in funzione della distanza r dall'asse del cavo.

8. La molla lineare della sospensione di un'auto ha costante elastica $k = 175$ kN/m e la sospensione (completa di ammortizzatore) ha capacità termica $C = 2{,}50$ kJ/K. Sapendo che sulla molla insiste una massa $m = 340$ kg, determina la variazione di temperatura della sospensione conseguente all'assorbimento di un'oscillazione causata da una buca stradale di profondità pari a 10 cm (uguale all'ampiezza iniziale dell'oscillazione).

SVOLGIMENTO PROBLEMA 1

a. Affinché la funzione:

$$f(x) = \frac{a}{\sqrt{b + cx^2}}$$

abbia un asintoto verticale di equazione $x = 1$, si deve avere (tenendo conto che $a \in \mathbb{R}^+$):

$$\lim_{x \to 1} \frac{a}{\sqrt{b + cx^2}} = \frac{a}{\sqrt{b + c}} = +\infty$$

Quindi deve essere:

$$b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -b$$

Esplicitando l'equazione della tangente nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$ si ha:

$$y = \frac{4\sqrt{3}}{9}x + \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

il cui coefficiente angolare è la derivata valutata nell'ascissa $\frac{1}{2}$. La derivata di f è:

$$f'(x) = -\frac{a \cdot \frac{1}{2\sqrt{b + cx^2}} \cdot 2cx}{b + cx^2} = -\frac{acx}{(b + cx^2)\sqrt{b + cx^2}}$$

Imponiamo quindi che valga:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\frac{1}{2}ac}{\left(b + \frac{1}{4}c\right)\sqrt{b + \frac{1}{4}c}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

Sostituendo $c = -b$ si ricava:

$$\frac{ab}{\frac{3}{4}b\sqrt{\frac{3}{4}b}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{b}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = a^2$$

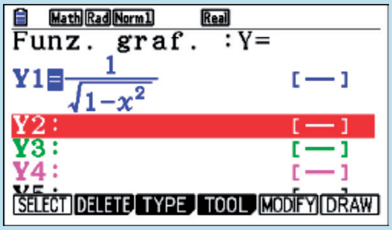
Sostituendo nella funzione iniziale, e ricordando che $c = -b = -a^2$, si ottiene:

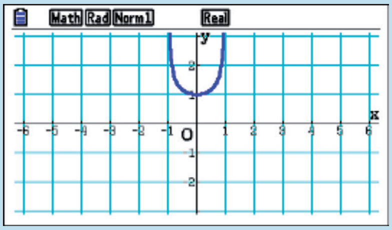
$$f(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - a^2x^2}} = \frac{a}{a\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

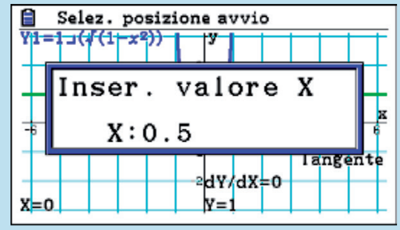
Verifichiamo che effettivamente il grafico della funzione trovata abbia le caratteristiche richieste, ossia un asintoto verticale di equazione $x = 1$ e tangente di equazione $4\sqrt{3}x - 9y + 4\sqrt{3} = 0$ nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

Per farlo rappresentiamo in **GRAFICI** la funzione $Y1 = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.



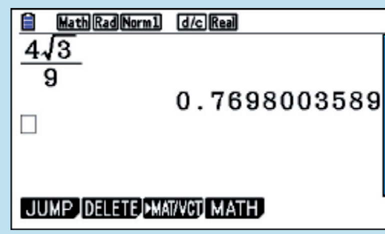


Con la sequenza **SHIFT MENU** entriamo nel **SET UP** della calcolatrice e, spostandoci con il cursore, selezioniamo la modalità **Derivative** su **On** con **F1**.
Torniamo al menu **GRAFICI** con **EXIT**, rappresentiamo la funzione e tracciamo la tangente in $x = \frac{1}{2}$.
Per farlo digitiamo **F4(Sketch)**, **F2(Tangent)** e digitiamo il valore 0.5.
Confermiamo con **EXE** e digitiamo nuovamente **EXE** per scrivere l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto di ascissa 0.5.



La retta trovata ha equazione $y = 0.7698x + 0.7698$
Scrivendo in forma esplicita la retta data dal problema otteniamo $y = \frac{4\sqrt{3}}{9}x + \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

In **CALCOLI** possiamo verificare che $\frac{4\sqrt{3}}{9} = 0.7698$



b. La funzione trovata è definita per $1 - x^2 > 0$, ovvero per $x \in (-1, 1)$. Non possiede zeri, interseca l'asse y nel punto $P(0; 1)$ ed è positiva in tutto il dominio (in quanto quoziente di funzioni positive). La funzione è pari e, per quanto già visto al punto precedente possiede l'asintoto verticale $x = 1$. Per simmetria, anche $x = -1$ è un suo asintoto verticale.
Si tratta di una funzione derivabile, in quanto quoziente di funzioni derivabili. La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$$

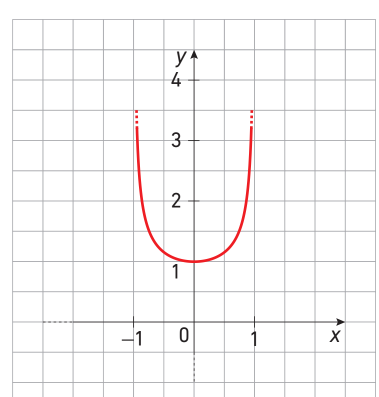
Dato che il denominatore è sempre positivo, $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$. Di conseguenza, f è crescente su $(0, 1)$ e decrescente su $(-1, 0)$: pertanto, il punto $P(0; 1)$ è punto di minimo assoluto.
La derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{(1 - x^2)^3} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{(1 - x^2)^3}} \cdot 3(1 - x^2)^2 \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(1 - x^2)^3 + 3x^2(1 - x^2)^2}{(1 - x^2)\sqrt[3]{(1 - x^2)^3}}$$

$$f''(x) = \frac{(1 - x^2)^2(1 - x^2 + 3x^2)}{(1 - x^2)\sqrt[3]{(1 - x^2)^3}} = \frac{(1 - x^2)^2(1 + 2x^2)}{(1 - x^2)\sqrt[3]{(1 - x^2)^3}}$$

Il denominatore è sempre positivo sul dominio; inoltre anche $(1 - x^2)^2 > 0$ e $1 + 2x^2 > 0$ su $(-1, 1)$. Quindi $f''(x) > 0$ su $(-1, 1)$ e la funzione è convessa.
Il grafico della funzione è mostrato a lato.



L'area della parte di piano delimitata dal grafico della funzione, dagli assi coordinati e dall'asintoto verticale $x = 1$ è data dall'integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{a \to 1^-} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Ricordando che:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

si ricava:

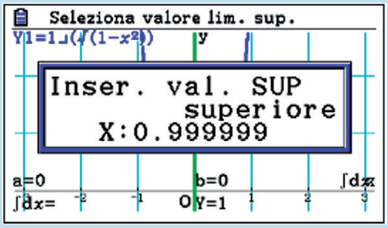
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{a \to 1^-} [\operatorname{arcsen} x]_0^a = \lim_{a \to 1^-} (\operatorname{arcsen} a - \operatorname{arcsen} 0) = \lim_{a \to 1^-} (\operatorname{arcsen} a) = \frac{\pi}{2}$$

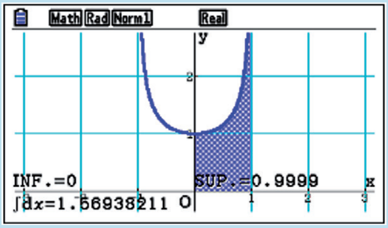
CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

Non possiamo calcolare questo integrale improprio utilizzando la calcolatrice. Però possiamo trovare il valore dell'integrale tra 0 e un numero molto vicino a 1 e verificare se il risultato che otteniamo si avvicina a $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$.

Ingrandiamo un po' il grafico della funzione e digitiamo la sequenza **F5(G-Solv)**, **F6(▶)**, **F3(∫dx)** e inseriamo zero come valore inferiore di integrazione e 0,999999 come valore superiore.

Otteniamo il valore $\int dx = 1{,}569$, che effettivamente è vicino a $\frac{\pi}{2}$.





c. Nel processo di annichilazione le due particelle hanno energia cinetica relativistica $K = (\gamma - 1)mc^2$ che è tripla dell'energia di riposo $E_0 = mc^2$. La massa dell'elettrone è uguale a quella della sua antiparticella, il positrone, e pari a $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. Dalla relazione $K = 3E_0$ ricaviamo γ:

$$(\gamma - 1)mc^2 = 3mc^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 4$$

Ora utilizziamo la relazione:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 4$$

per ricavare v:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{15}{16}} = 0{,}968 \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}968c$$

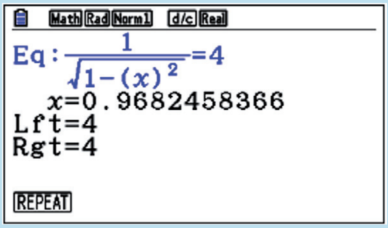
CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

Risolviamo con il menu **EQUAZIONI** per controllare il risultato.

Se poniamo $x = \frac{v}{c}$ l'equazione da risolvere è:

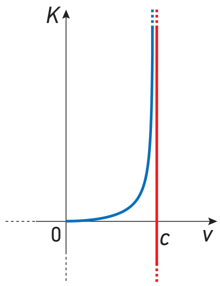
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 4$$

che ha come soluzione $x = 0{,}968$ ossia $v = 0{,}968c$.



Poiché l'energia cinetica relativistica è:

$$K = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) m c^2$$



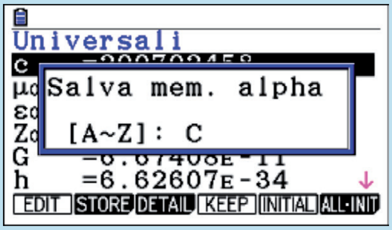
si osserva che il dominio di tale funzione è dato da $1 - \frac{v^2}{c^2} > 0$, cioè $v^2 < c^2$, ovvero $0 \leqslant v < c$ (in cui abbiamo considerato che la velocità non può essere negativa).
Dato che:

$$\lim_{v \to c^-} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) m c^2 = +\infty$$

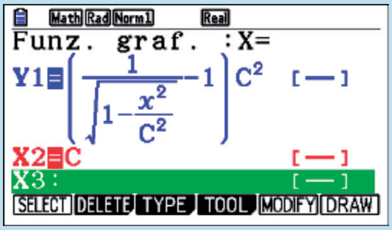
la funzione ha un asintoto verticale per $v = c$, come si può osservare anche sul grafico: la velocità di un corpo dotato di massa non può né raggiungere né superare il valore $v = c$.

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

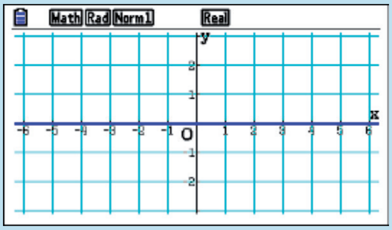
Memorizziamo il valore della velocità della luce c. Troviamo la costante nel menu **PHYSIUM** in **Costanti Fisiche fondamentali**. Entriamo nell'ambiente dedicato alle **Costanti Universali** digitando 1: nella prima riga troviamo la velocità della luce c. Digitiamo **F2(STORE)** seguito dalla lettera C per memorizzarne il valore e confermiamo con **EXE**.



Ora rappresentiamo la funzione $K = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) m c^2$ nel menu **GRAFICI** ponendo $m = 1$ e indicando $v = x$.

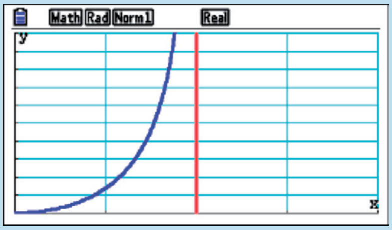


Nel secondo slot rappresentiamo la retta $x = c$. Per farlo digitiamo **F3(TYPE)**, **F4(X=)** per rappresentare rette parallele all'asse delle ordinate.
Se proviamo a rappresentare le funzioni $Y1 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) m c^2$ e $X2 = C$ visualizziamo un grafico non significativo.



Modifichiamo allora la finestra di visione scegliendo valori di x compresi tra 0 e $2C$, con una scala pari a $\frac{C}{2}$, e valori di y compresi tra 0 e $1 \cdot 10^{17}$, con una scala pari a $1 \cdot 10^{16}$.

Queste scelte ci permettono di visualizzare meglio il comportamento della funzione vicino all'asintoto verticale.



d. Per la conservazione dell'energia si ha $E_{iniziale} = E_{finale}$, cioè:

$$2 \cdot \gamma m c^2 = 2 \cdot hf$$

dove al primo membro ci sono le energie relativistiche delle particelle materiali, al secondo membro quelle dei fotoni , dove h è la costante di Planck, pari a $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s. Semplificando 2 e ricordando che $\gamma = 4$:

$$4 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = (6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})f$$

$$f = 4{,}95 \cdot 10^{20}\ \text{Hz}$$

Se le due particelle procedono l'una contro l'altra, con stessa velocità e stessa massa, le loro quantità di moto sono uguali e opposte, quindi si annullano. Per la conservazione della quantità di moto, deve annullarsi anche la quantità di moto totale dei fotoni che sono prodotti dall'annichilazione: se vi fosse un solo fotone prodotto, la sua quantità di moto non potrebbe annullarsi.

PER APPROFONDIRE

e. Dalla teoria della relatività ristretta, si ottiene che l'energia relativistica E può essere espressa mediante la quantità di moto p nel modo seguente:

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$$

Per i fotoni, che sono privi di massa, l'equazione precedente è equivalente a:

$$E = cp$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}) \cdot (4{,}95 \cdot 10^{20}\ \text{Hz})}{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 1{,}1 \cdot 10^{-21}\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

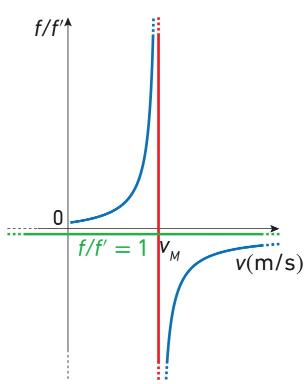
f. Il fenomeno descritto è detto effetto Compton e, dalle relazioni di conservazione della quantità di moto e dell'energia relativistica, già usate nel punto **d.** del problema, si ottiene che il fotone diffuso (cioè il fotone risultante dopo l'urto con l'elettrone fermo) ha una lunghezza d'onda che differisce da quella iniziale per la quantità:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

dove m_e è la massa dell'elettrone e θ è l'angolo di scattering, cioè l'angolo di deviazione del fotone diffuso rispetto alla direzione del fotone incidente.

SVOLGIMENTO PROBLEMA 2

a. Nella situazione qui delineata la frequenza registrata sarà più alta della frequenza emessa (effetto Doppler), tanto per l'avvicinamento della sorgente all'osservatore, quanto per l'avvicinamento dell'osservatore alla sorgente.



Per calcolare la frequenza percepita, utilizziamo la formula:

$$f' = \frac{1 \pm \frac{v_O}{v_M}}{1 \mp \frac{v_s}{v_M}} \qquad f = \frac{v_M \pm v_O}{v_M \mp v_s} f$$

dove v_O e v_s sono i valori assoluti delle velocità dell'osservatore e della sorgente rispetto al mezzo di propagazione. In assenza di vento, esse coincidono con le velocità rispetto al suolo. Abbiamo quindi $v_O = v_s = v$ e dovremo usare:

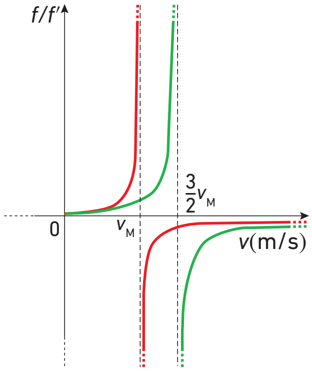
- il segno + al numeratore, in quanto l'osservatore si avvicina alla sorgente;
- il segno − al denominatore, in quanto la sorgente si avvicina all'osservatore.

Il rapporto richiesto è quindi $\frac{f'}{f} = \frac{v_M + v}{v_M - v}$. Si tratta di una funzione omografica, con asintoti $f'/f = -1$ e $v = v_M$.
Il rapporto vale 1 a velocità nulla, come ci si aspettava, è una funzione crescente di v e l'asintoto verticale corrisponde a una barriera del suono.

b. In presenza del vento, i valori assoluti delle velocità dell'osservatore e della sorgente rispetto al mezzo di propagazione non coincidono con le velocità rispetto al suolo. Si avrà $v_S = \frac{3}{2}v$ e $v_O = \frac{1}{2}v$, da cui:

$$\frac{f'}{f} = \frac{v_M + \frac{v}{2}}{v_M - \frac{3v}{2}} = \frac{2v_M + v}{2v_M - 3v}$$

L'andamento del rapporto in funzione della velocità dei treni è sostanzialmente lo stesso, ma l'asintoto verticale è spostato alla velocità $v = \frac{3}{2}v_M$ (curva verde nel grafico a fianco).

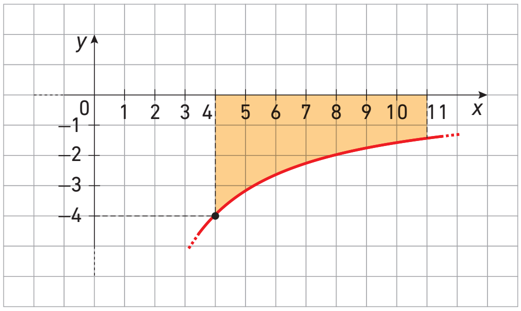


c. Scriviamo la funzione trovata al punto **a.** in simboli matematici più usuali: $y = f(x) = \frac{v_M + x}{v_M - x}$. Come già scritto, si tratta di una funzione omografica, con centro di simmetria $C(v_M; -1)$.
La traslazione richiesta, inversa della traslazione di vettore $\vec{v}(-v_M; 1)$, è $\begin{cases} x' = x + v_M \\ y' = y - 1 \end{cases}$.
Otteniamo la funzione traslata $y = \frac{-2v_M}{x}$.
Come ci si aspettava, si tratta di una iperbole equilatera del tipo $y = \frac{k}{x}$, con $k = -2v_M$. Sappiamo che i vertici hanno coordinate $(\pm\sqrt{k}; \pm\sqrt{k})$. Nel nostro caso, in cui si trovano nel secondo e quarto quadrante, sono $V_1(-\sqrt{2v_M}; \sqrt{2v_M})$ e $V_2(\sqrt{2v_M}; -\sqrt{2v_M})$.
La loro distanza è quindi $V_1V_2 = 4\sqrt{v_M}$.

d. Per $v_M = 8$ la funzione diviene $y = -\frac{16}{x}$ e l'ascissa del vertice situato nel IV quadrante è $x = \sqrt{2v_M} = 4$. L'area richiesta è l'opposto dell'integrale della funzione da 4 a h:

$$Area = -\int_4^h \frac{-16}{x}dx = 16\int_4^h \frac{1}{x}dx = 16\,[\ln x]_4^h = 16\,\ln\frac{h}{4}$$

La condizione che l'area sia uguale a 16 è quindi equivalente a $\ln\frac{h}{4} = 1$, equazione logaritmica elementare che, risolta, individua l'estremo superiore di integrazione $h = 4e$.



SVOLGIMENTO QUESITI

1. Osserviamo innanzitutto che, in tutti i punti dell'intervallo di definizione $[-1, 2]$, ad esclusione di $x = 0$, la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} a\,e^x + b\ln(x+1) & \text{se } -1 < x \leqslant 0 \\ bx^3 + 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

è sicuramente derivabile, in quanto costituita da somme e composizioni di funzioni derivabili. Per ottenere la continuità anche nel punto nel punto $x = 0$, devono valere le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^-} [a\,e^x + b\cdot\ln(x+1)] = \lim_{x\to 0^+} (bx^3+1) = a \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Nei prossimi calcoli, sostituiamo questo valore nell'espressione di $f(x)$. Affinché f sia derivabile, deve valere:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

Abbiamo:

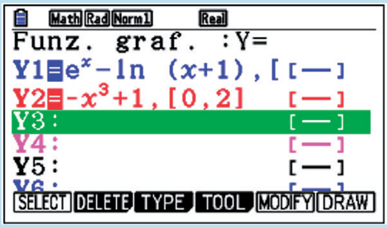
$$f'(x) = \begin{cases} e^x + \dfrac{b}{x+1} & \text{se } -1 < x < 0 \\ 3b\,x^2 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

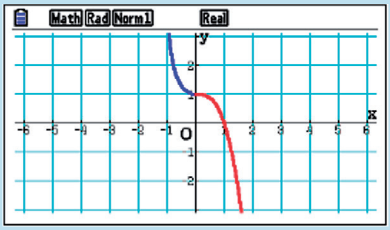
Sostituendo nell'uguaglianza $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(e^x + \frac{b}{x+1}\right) = \lim_{x\to 0^+} 3b\,x^2 \quad \Rightarrow \quad 1 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

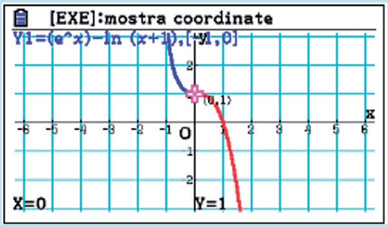
CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

Verifichiamo la continuità della funzione utilizzando la calcolatrice grafica.
Nel menu **GRAFICI** rappresentiamo le funzioni $Y1 = e^x - \ln(x+1)$ e $Y2 = -x^3 + 1$ (ottenute da $f(x)$ con $a = 1$ e $b = -1$) negli intervalli di definizione dati.

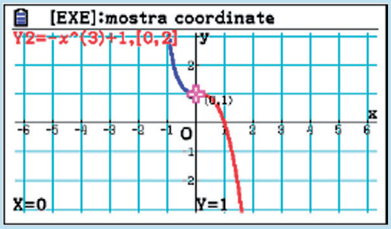




Controlliamo la continuità in $x = 0$. Con il tasto **F1(TRACE)** collochiamoci in $x = 0$. Osserviamo in alto a sinistra che la calcolatrice restituisce il valore $y = 1$ se $x = 0$ per quanto riguarda la funzione Y1 rappresentata in blu.



Spostandoci ora con il cursore in alto o in basso cambiamo la funzione selezionata, andando sulla funzione Y2 rappresentata in rosso (sempre in alto a sinistra).
Anche qui la funzione restituisce il valore $y = 1$ se $x = 0$. Possiamo dunque affermare che la funzione assegnata è continua in $x = 0$.



Per verificare la derivabilità con la sequenza **SHIFT MENU** entriamo nel **SET UP** della calcolatrice e, sempre spostandoci con il cursore, selezioniamo la modalità **Derivative** su **On** con **F1**.
Torniamo al menu **GRAFICI** con **EXIT**, rappresentiamo la funzione e tracciamo la tangente in $x = 0$.
Per farlo digitiamo **F4(Sketch)**, **F2(Tangent)** e digitiamo il valore 0.
Osserviamo che la calcolatrice restituisce il valore $\frac{dy}{dx} = 0$ se $x = 0$ e $y = 1$ per quanto riguarda la funzione $Y1$ rappresentata in blu.

Spostandoci ora con il cursore in alto o in basso cambiamo la funzione selezionata, andando sulla funzione $Y2$ rappresentata in rosso (sempre in alto a sinistra).
Troviamo ancora $\frac{dy}{dx} = 0$ se $x = 0$ e $y = 1$.

Possiamo dunque affermare che la funzione assegnata è derivabile in $x = 0$, in quanto la derivata destra e la derivata sinistra sono uguali.

2. La funzione $f(x) = x - \arctan x$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Pertanto dovremo dimostrare che per ogni valore positivo di k, $f(-k) \neq f(k)$ per nessun valore $k \in \mathbb{R}^+$. Esplicitando l'espressione analitica di f nell'equazione precedente, otteniamo:

$$-k - \arctan(-k) = k - \arctan(k)$$

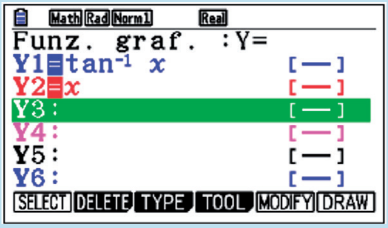
Dato che l'arcotangente è una funzione dispari, si ha:

$$-k + \arctan(k) = k - \arctan(k) \quad \Rightarrow \quad \arctan(k) = k$$

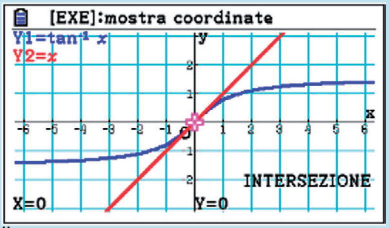
Non potendo risolvere l'equazione per via algebrica, procediamo per via grafica.

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

Con la sequenza **F5(G-Solv)**, **F5(INTSECT)** si osserva che l'unica soluzione dell'equazione è $k = 0$.



Quindi per $k \in \mathbb{R}^+$ la funzione non soddisfa $f(k) = f(-k)$, ovvero non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-k, k]$.



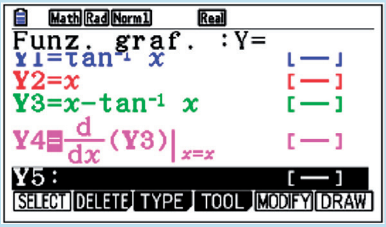
Nonostante quanto appena visto, f verifica la tesi del teorema di Rolle, perché la derivata si annulla in $x = 0$. Infatti:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} = 1$$

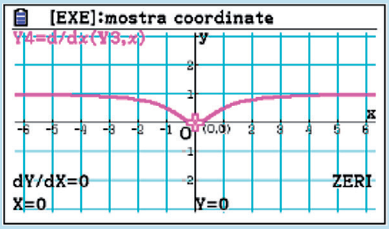
Ha come unica soluzione $x = 0$, che appartiene all'intervallo $[-k, k]$ per ogni k positivo.

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

Verifichiamolo deselezionando le funzioni disegnate in precedenza e inserendo ne terzo slot la funzione $Y3 = x - \arctan x$.
Nel quarto slot indichiamo di calcolare la derivata di $Y3$. Per farlo utilizziamo il tasto **OPTN** seguito da **F2(CALC)**, **F1**$\left(\frac{d}{dx}\right)$, **F1(Y)** seguito da 3.



Deselezioniamo ora anche Y3, così da rappresentarne solo la derivata. Con **F5(G-Solv)**, **F1(ROOT)** troviamo il punto in cui la derivata prima della funzione f si azzera.



3. Per determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa intorno all'asse x della parte di piano sottesa al grafico di $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, per $x \in [2, 3]$, calcoliamo l'integrale:

$$\int_2^3 \pi\,[f(x)]^2\,dx = \pi\int_2^3 (x^2-4)dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 = \pi\left[(9-12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right)\right] = \frac{7}{3}\pi$$

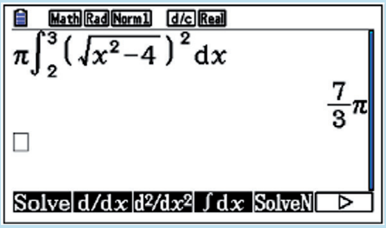
Per determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa intorno all'asse y della stessa parte di piano, calcoliamo l'integrale:

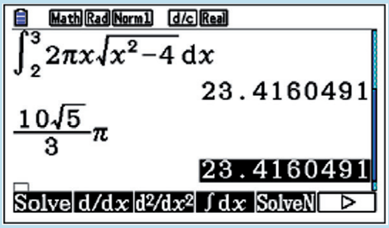
$$\int_2^3 2\pi x f(x)\,dx = \pi\int_2^3 2x\sqrt{x^2-4}\,dx = \pi\int_2^3 2x(x^2-4)^{\frac{1}{2}} = \pi\left[\frac{(x^2-4)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_2^3 = \frac{2}{3}\pi\left[(x^2-4)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\cdot\sqrt{5^3} = \frac{2}{3}\pi\cdot 5\sqrt{5} = \frac{10\sqrt{5}}{3}\pi$$

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

Verifichiamo i risultati ottenuti utilizzando il menu **CALCOLI**.





4. Poiché $y = p(x)$ è un polinomio di terzo grado, l'equazione $p(x) = 0$, da cui si ottengono gli zeri della funzione, ha al massimo tre soluzioni. Inoltre, la derivata prima sarà un polinomio di secondo grado e quindi, per il teorema di Fermat, i punti stazionari di p (ovvero le soluzioni dell'equazione $p'(x) = 0$) saranno al massimo 2.
Infine, i punti di flesso sono le soluzioni dell'equazione $f''(x) = 0$: essendo la derivata seconda un polinomio di primo grado, p presenterà sempre un solo punto di flesso.

5. Le trasformazioni galileiane della velocità forniscono $v_2' = v_2 - v_1 = -682$ km/s.
Le trasformazioni relativistiche invece danno:

$$v_2' = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_2 v_1}{c^2}} = \frac{-682 \text{ km/s}}{1 - \frac{518 \cdot 1200\,(\text{km/s})^2}{3 \cdot 10^5\,(\text{km/s})^2}} = -682{,}0047 \text{ km/s}$$

6. L'intensità dell'onda elettromagnetica generata dal dispositivo è definita come potenza per unità di superficie: $I = \frac{P}{S} = \frac{1}{2} c\,\varepsilon_0 E^2$, con c velocità dell'onda elettromagnetica nel vuoto, ε_0 costante dielettrica nel vuoto, E intensità del campo elettrico. Se come superficie S prendiamo quella di una sfera di raggio d, otteniamo:

$$\frac{1}{2} c\,\varepsilon_0 E^2 = \frac{P}{4\pi d^2} \quad \Rightarrow \quad E = \sqrt{\frac{2P}{4\pi d^2 c\,\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{4\pi (0{,}5 \text{ m})^2 \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot (8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)}} = 0{,}44 \text{ V/m}$$

7. In considerazione della simmetria cilindrica del cavo, applichiamo la legge di Gauss con una superficie coassiale al cavo, di raggio r e altezza L. All'interno del cavo si avrà un campo elettrico nullo, mentre all'esterno:

$$2\pi r L E = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Il valore massimo si ha in corrispondenza di $r = R$:

$$E = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-9} \text{ nC}}{2\pi\,(8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(3 \cdot 10^{-3} \text{ m})} = 13{,}8 \text{ kV/m}$$

8. L'ampiezza iniziale dell'oscillazione permette di calcolare l'energia potenziale elastica caricata nella molla:

$$U = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{(175 \cdot 10^3 \text{ N/m}) \cdot (10^{-1} \text{ m})^2}{2} = 0{,}875 \text{ kJ}$$

Grazie all'ammortizzatore, la sospensione assorbe l'energia elastica, aumentando la sua temperatura di:

$$\Delta T = \frac{U}{C} = \frac{0{,}875 \text{ kJ}}{2{,}50 \text{ kJ/K}} = 0{,}35 \text{ K} = 0{,}35\ °\text{C}$$