Problemi proposti

sul modello dei problemi presentati
nelle prove ministeriali

1 Sia data la funzione $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a. Si studi la funzione $f(x)$ e la si disegni.

b. Tra le primitive di $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, si determini la funzione il cui minimo relativo ha ordinata -4 e la si chiami $F(x)$.

c. Verificato che $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$, si stabilisca il numero di intersezioni di $F(x)$ con l'asse delle ascisse e se ne tracci il grafico a partire da quello di $f(x)$.

d. Detta t la tangente al grafico di f nel suo punto di intersezione con l'asse x, si determini l'area della regione piana individuata da tale grafico e da t nell'intervallo $[1, e^2]$.

e. Si stabilisca il numero di soluzioni reali dell'equazione:

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}(\ln x - 2) = 5$$

$\left[\textbf{c.}\text{ una intersezione in } (e^2; 0); \textbf{ d. } t: y = x - 1; \text{ area} = \frac{e^4}{4} - e^2 - \frac{7}{2}; \textbf{ e.}\text{ nessuna soluzione reale}\right]$

2 Si considerino le funzioni $f_k(x) = xe^{kx}$, $k \in \mathbb{R}_0$.

a. Per quale valore di k la funzione ha un estremo relativo per $x = -1$?

b. Si tracci il grafico della curva grafico di $y = f_1(x)$.

c. Si calcoli l'area della superficie delimitata dal grafico di $y = f_1(x)$ e dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x = -1$.

d. Si studi, in funzione di k, l'andamento delle curve $y = f_k(x)$.

e. Tra le funzioni $g(x) = m\frac{1}{x-1} + n$ con $m, n \in \mathbb{R}$ ne esiste una il cui grafico è tangente al grafico di $y = f_1(x)$ nel punto $(0; 0)$. Si calcolino m e n in questo caso.

f. Si determini il luogo dei punti P estremi relativi delle $f_k(x)$ al variare di $k \in \mathbb{R}_0$.

$\left[\textbf{a. } k = 1; \textbf{ c. } 1 - \frac{2}{e}; \textbf{ e. } m = n = -1; \textbf{ f. } y = \frac{x}{e}, \text{ con } x \neq 0\right]$

3 In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = (x - a)e^{\left(2 - \frac{x}{a}\right)}, \quad a \in \mathbb{R}_0$$

a. Si determini per quali valori di a la funzione $f_a(x)$ presenta un minimo o un massimo assoluto nel suo dominio.

b. Sia P_a il punto in cui $f_a(x)$ interseca l'asse delle ascisse. Si dimostri che le rette tangenti ai grafici delle $f_a(x)$ nei punti P_a sono tutte parallele tra loro.

c. Si considerino le funzioni $f_a(x)$ che hanno un punto di massimo assoluto: si dimostri che hanno un flesso in un punto del primo quadrante e che le tangenti nel punto di flesso sono tutte parallele tra loro.

d. La conclusione del punto **c.** è vera anche per le funzioni che hanno un minimo assoluto?

e. Si determini il valore di a per il quale la funzione $f_a(x)$ presenta un asintoto orizzontale destro ed è tale che la tangente nel punto di flesso forma con gli assi cartesiani un triangolo di area $A = \frac{25}{e}$.

f. Si studi la funzione per $a = 1$.

g. Si calcoli l'area $B(k)$ della regione di piano delimitata dal grafico della funzione del punto **e.**, dall'asse x e dalla retta $x = k$, con $k > \sqrt{2}$.

h. Si calcoli il limite di $B(k)$ per $k \to +\infty$.

$\left[\textbf{a. } a < 0 \text{ min assoluto, } a > 0 \text{ max assoluto}; \textbf{ d. } \text{sì}; \textbf{ e. } a = \sqrt{2}; \textbf{ g. } \sqrt{2}e^2\left(\sqrt{2}e^{-1} - ke^{-\frac{k}{\sqrt{2}}}\right); \textbf{ h. } 2e\right]$

4 Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+b}$.

a. Si individui per quale valore di b la funzione ha la tangente $t(x): y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = -1$ nel punto in cui interseca l'asse delle ordinate.

Verificato che si ha $b = 1$:

b. Si studi la funzione f in questo caso.

c. Si trovi l'espressione analitica di una funzione $h(x) = ax^2 + dx + c$ tale che:

$$w(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geqslant 0 \\ h(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile in tutto il suo dominio.

d. Si trovi l'area della regione finita di piano delimitata da t e dal grafico di f.

e. Si consideri la funzione $G(x) = t(x) - f(x)$ e se ne tracci un grafico qualitativo.

f. Si studi l'andamento qualitativo della funzione g tale che $g'(x) = G(x)$ per cui si ha $g(0) = 0$.

g. Si individui esplicitamente un flesso di g fornendo adeguate motivazioni.

[**c.** $h(x) = ax^2 - x + 1$, con $a \in \mathbb{R}$; **d.** $\frac{1}{2}(\ln 2 + 1) - \frac{\pi}{4}$; **g.** $(0; 0)$ è un punto di flesso a tangente orizzontale]

5 In un sistema di riferimento cartesiano xOy, si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ln x & \text{se } x > 0 \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e si determini il valore del parametro reale a in modo tale che la funzione sia continua nel suo dominio.
Per il valore di a così ottenuto:

a. si stabilisca l'insieme di derivabilità della funzione;

b. si studi e si rappresenti il grafico Γ della funzione;

c. si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse;

d. si determini l'equazione dell'arco di parabola P con asse coincidente con l'asse x, vertice nell'origine e passante per il punto di Γ di ascissa $x = e$;

e. nella regione finita di piano compresa tra la parabola P e la curva Γ si conduca una retta parallela all'asse delle ordinate e si determini la misura $g(x)$ della corda intercettata da tale retta sulle due curve. Si stabilisca se $g(x)$ presenta un massimo.

[$a = 0$; **a.** $(0, +\infty)$; **c.** $\frac{4}{9}$; **d.** $x = y^2$ con $y \geqslant 0$; **e.** $g(x) = \sqrt{x}(1 - \ln x)$ con $0 \leqslant x \leqslant e$; $\max\left(\frac{1}{e}; 2e^{-\frac{1}{2}}\right)$]