

PROBLEMA 1

È data la famiglia di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{(n + \ln x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

- a. Trova, se esiste un valore di α che rende continue tutte le funzioni della famiglia considerata. In caso contrario, classifica l'eventuale punto di discontinuità.

Supponi ora che $\alpha = 0$.

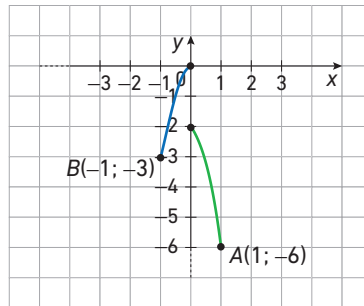
- b. Dimostra che tutte le funzioni $f_n(x)$ hanno un solo punto di massimo assoluto e che il rapporto tra i punti di massimo assoluto di $f_n(x)$ e $f_{n+1}(x)$ è costante.
 c. Determina l'equazione cartesiana del luogo dei punti cui appartengono i massimi delle $f_n(x)$.
 d. Studia la funzione $f_2(x)$ e tracciane il grafico.
 e. Trova l'area delimitata dalla curva $y = \frac{f_2(x)}{x}$, dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = e^{-2}$ e $x = e^{-1}$.
 f. Deduci dallo studio di f_2 il grafico della funzione:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2 + \ln |x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 2

È data $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

In figura è mostrato il grafico γ della sua derivata $y = g(x)$.



- a. Studia la derivabilità, la monotonia e la concavità della funzione $y = f(x)$ che verifica $f(0) = 0$. Indica gli eventuali punti di estremo relativo e assoluto. Traccia un possibile grafico qualitativo di $y = f(x)$ e $y = f''(x)$.
 b. Supposto che:

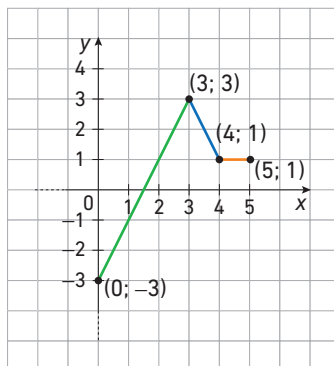
$$g(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -4xe^{x-1} - 2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

e che $f(0) = 0$, trova l'espressione analitica di $y = f(x)$.

- c. Determina il numero degli zeri della funzione $y = f(x)$ e motiva la loro eventuale esistenza ed eventuale unicità.
 d. Calcola l'area della regione piana delimitata dall'asse delle ascisse, dall'asse delle ordinate, dal grafico di $y = f(x)$ e dalla retta $x = -1$.
 e. Sia ora $h: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $h'(x) = g(x) + 2$ e $h(-1) = 0$. Traccia un possibile grafico di $y = h(x)$, individuando in modo qualitativo la presenza di massimi e minimi senza ricercare il minimo assoluto.

QUESITI

1. Nella figura è rappresentato il grafico della funzione $y = f(x)$. Stabilisci dove la funzione è derivabile e traccia il grafico della sua derivata prima. Stabilisci inoltre se nell'intervallo $[2, 4]$ la funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle.



2. Calcola la media integrale della funzione:

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} \quad \text{in} \quad \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Enuncia poi il teorema della media integrale e descrivi qualitativamente il significato del teorema per la funzione considerata.

3. Determina l'equazione degli eventuali asintoti di

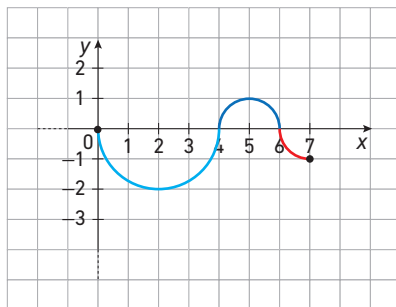
$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

4. Tra tutti i coni iscritti in una sfera di raggio R , individua quello che ha il massimo volume.
(Suggerimento: il volume V di un cono circolare che ha raggio di base r e altezza h è $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)
5. Trova la retta tangente al grafico di:

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2 + 1} dt$$

nel suo punto di ascissa $x = 0$.

6. La funzione $h : [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ è rappresentata in figura; il suo grafico è costituito da archi di circonferenza.



Sia $f(x) = \int_0^x h(t) dt$. Determina se a f è possibile applicare il teorema di Weierstrass, e, in caso affermativo, trova i punti di massimo e minimo assoluto.

7. Sia $f(x)$ una funzione continua definita su $\mathbb{R}$ tale che $\int_0^6 f(x) dx = 11$. Dei seguenti integrali

$$\int_0^3 f(2x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^3 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Indica quale e spiegate il motivo.

8. Senza fare uso del teorema di De L'Hôpital, calcola:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{e^\pi - e^x}$$

SVOLGIMENTO PROBLEMA 1

- a. Le funzioni f_n sono definite su $\mathbb{R}^+$. Per $x > 0$ la funzione è continua in quanto composizione di funzioni continue. Per ottenere la continuità anche in $x = 0$, deve valere:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = f(0) = \alpha$$

Si ha però:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{n + \ln x}{x} = -\infty$$

dove, per risolvere la forma indeterminata, abbiamo usato la gerarchia degli infiniti. Questo risultato è indipendente da n , quindi ogni funzione della famiglia è discontinua qualsiasi sia il valore di α . Il punto di discontinuità è di tipo essenziale.

- b. Le funzioni f_n sono derivabili su $\mathbb{R}_0^+$. Su questo insieme si ha:

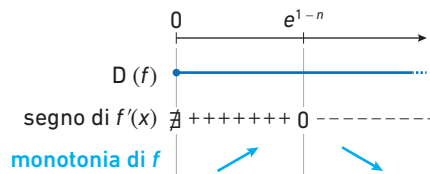
$$f'_n(x) = \frac{1 - n - \ln x}{x^2}$$

Le funzioni non sono derivabili in $x = 0$ perché in tale punto non verificano la condizione necessaria di continuità.

Per trovare il punto di massimo assoluto, innanzitutto osserviamo che $x = 0$ è un punto di massimo relativo. Guardiamo poi quando la derivata si annulla:

$$f'_n(x) = 0 \Rightarrow 1 - n - \ln x = 0 \Rightarrow x = e^{1-n}$$

Osserviamo che $f'_n(x) > 0$ se e solo se $1 - n - \ln x > 0$, ossia se $0 < x < e^{1-n}$. Ricaviamo queste informazioni sulla monotonia delle funzioni f_n :



Di conseguenza, le funzioni f_n hanno anche il punto di massimo relativo $x = e^{1-n}$. Dato che

$$f_n(e^{1-n}) = \frac{(n + \ln e^{1-n})}{e^{1-n}} = \frac{1}{e^{1-n}} > 0, \quad x = e^{1-n} \text{ è il punto di massimo assoluto di } f_n.$$

Il rapporto tra i punti di massimo assoluto di $f_n(x)$ e $f_{n+1}(x)$ è: $\frac{e^{1-n}}{e^{1-(n+1)}} = e$.

- c. L'equazione del luogo dei punti a cui appartengono i massimi delle f_n è il luogo che contiene i punti della forma

$$(e^{1-n}, f_n(e^{1-n})) = \left(e^{1-n}, \frac{n+1-n}{e^{1-n}}\right) = \left(e^{1-n}, \frac{1}{e^{1-n}}\right)$$

Si tratta quindi della curva di equazione $y = \frac{1}{x}$.

- d. Studiamo la funzione:

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{(2 + \ln x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- Abbiamo già stabilito che il dominio di f_2 è $\mathbb{R}^+$. Il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, quindi la funzione non è né pari né dispari.
- La funzione si annulla per $x = e^{-2}$. Perciò le intersezioni con gli assi saranno $(0; 0)$ e $(e^{-2}; 0)$.
- Per quanto riguarda il segno di f_2 , risolvendo la disequazione $\ln x > -2$ sappiamo che la funzione è negativa su $(0, e^{-2})$ ed è positiva su $(e^{-2}, +\infty)$.

- Abbiamo già calcolato $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = -\infty$; si ha inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln x}{x} = 0$$

dove abbiamo ancora usato la gerarchia degli infiniti.

- Dal calcolo dei limiti ricaviamo che f_2 ha l'asintoto verticale (destro) $x = 0$ e l'asintoto orizzontale $y = 0$.
- Abbiamo già visto che la funzione è derivabile su $(0, +\infty)$ e abbiamo studiato la monotonia al punto b.
- Abbiamo già trovato che $(0; 0)$ è un massimo relativo, mentre $(e^{-1}; e)$ è l'unico massimo assoluto. Non ci sono punti di minimo né assoluto né relativo.
- Studiamo la convessità della funzione, calcolando la funzione derivata seconda di $f_2(x)$ per $x > 0$:

$$f_2''(x) = \frac{2 \ln x + 1}{x^3}$$

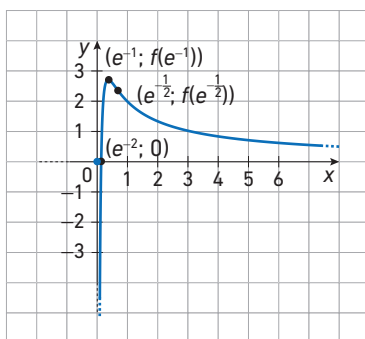
Si ha quindi:

$$f_2''(x) = 0 \Rightarrow 2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

e $f_2''(x) < 0$ per $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$.

Di conseguenza, $x = e^{-\frac{1}{2}}$ è un punto di flesso; la funzione risulta concava su $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ e convessa su $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$.

Mettendo insieme le informazioni ottenute dallo studio della funzione f_2 , ne tracciamo il grafico:



- e. Dato che per $x \in [e^{-2}, e^{-1}]$ la funzione $y = \frac{f_2(x)}{x}$ è non negativa, perciò l'area cercata è $\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \frac{2 + \ln x}{x^2} dx$. Per trovare una primitiva della funzione integranda usiamo la proprietà di additività:

$$\int \frac{2 + \ln x}{x^2} dx = \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{2}{x} + \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Possiamo risolvere l'ultimo integrale per parti, prendendo $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ e $h(x) = \ln x$. Si ha:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1 + \ln x}{x} + c$$

Riassumendo:

$$\int \frac{2 + \ln x}{x^2} dx = -\frac{2}{x} - \frac{1 + \ln x}{x} + c = -\frac{3 + \ln x}{x} + c$$

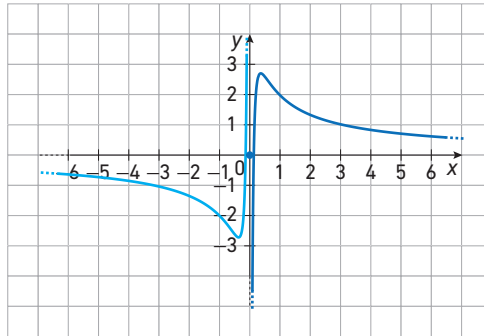
Tornando all'integrale definito:

$$\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \frac{2 + \ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{3 + \ln x}{x} \right]_{e^{-2}}^{e^{-1}} = -\frac{3 - 1}{e^{-1}} + \frac{3 - 2}{e^{-2}} = \frac{1 - 2e^{-1}}{e^{-2}} = e^2 - 2e$$

- f. La funzione $g(x)$ è definita su $\mathbb{R}$ e verifica $g(x) = f(x)$ per $x \geq 0$. Inoltre g è dispari: si ha infatti $g(0) = 0$ e, per $x \neq 0$:

$$g(-x) = \frac{2 + \ln|-x|}{-x} = -\frac{2 + \ln|x|}{x} = f(x)$$

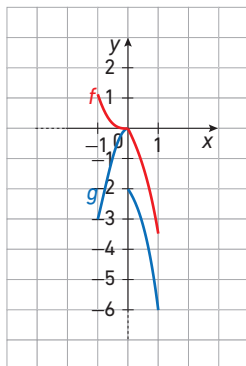
Di conseguenza, il grafico di g è uguale a quello di f_2 per $x \geq 0$; per $x < 0$ si ottiene per simmetria rispetto all'origine:



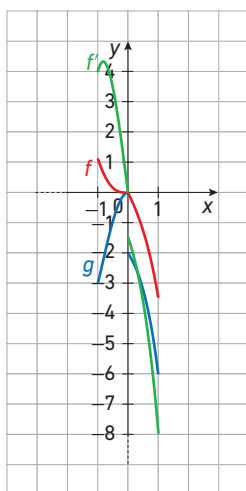
Poiché la funzione f è derivabile in $(0, +\infty)$, la funzione g è derivabile per $x \neq 0$. In $x = 0$ presenta una discontinuità essenziale.

SVOLGIMENTO PROBLEMA 2

- a. Dal grafico di g sappiamo le seguenti informazioni.
- La derivata di f è definita e continua su $[-1, 0) \cup (0, 1]$, mentre in $x = 0$ presenta una singolarità a salto. Questo significa che f è derivabile su $[-1, 0) \cup (0, 1]$, mentre $x = 0$ è un punto angoloso, perché i limiti della derivata da destra e da sinistra esistono e sono finiti, e per ipotesi sappiamo che la funzione f è continua.
 - La derivata di f , dove è definita, è negativa. Ciò significa che su $[-1, 0)$ e su $(0, 1]$ la funzione f è strettamente decrescente. Inoltre, poiché f è continua, possiamo concludere che è strettamente crescente su tutto $[-1, 1]$. Di conseguenza, $x = -1$ è l'unico punto di massimo assoluto e $x = 1$ è l'unico punto di minimo assoluto di f .
 - Per $x \rightarrow 0^-$, la derivata tende a 0. Perciò, arrivando da sinistra, il coefficiente angolare della retta tangente tende a $m = 0$. Per $x \rightarrow 0^+$, invece, la derivata tende a -2 : arrivando da destra, il coefficiente angolare della retta tangente tende a $m = -2$. L'angolo che si forma nel punto angoloso è quindi $\alpha = \arctan 0 - \arctan -2 = \arctan 2$.
 - Dato che f' è crescente su $[-1, 0)$ e decrescente su $(0, 1]$, f è convessa per $x < 0$ ed è concava per $x > 0$.
- b. Riportiamo nel grafico le informazioni su f ricavate al punto precedente, tenendo conto che f è continua e $f(0) = 0$.



Per quanto riguarda f'' , dal fatto che $g = f'$ è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$ ricaviamo che f'' è positiva per $x < 0$ ed è negativa per $x > 0$. Otteniamo il grafico seguente.



c. Calcoliamo le primitive dei due tratti di definizione della funzione g :

$$\int x^4 - 4x^2 dx = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + c_1, \text{ con } c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int -4xe^{x-1} - 2 dx = 4e^{x-1}(1-x) - 2x + c_2, \text{ con } c_2 \in \mathbb{R}$$

Imponendo il passaggio per l'origine otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + c_1 \right) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [4e^{x-1}(1-x) - 2x + c_2] = 0 \Rightarrow 4e^{-1} + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -4e^{-1}$$

Allora la funzione f è:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 4e^{x-1}(1-x) - 2x - 4e^{-1} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

d. Abbiamo già stabilito al punto a. che f è decrescente, inoltre sappiamo che $f(0) = 0$. Di conseguenza, f ha un unico zero, che è proprio $x = 0$.

e. Dato che per $x \in [-1, 0]$ f è non negativa, l'area cercata è:

$$\int_{-1}^0 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 \right) dx = \left[\frac{x^6}{30} - \frac{x^4}{3} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{30} + \frac{1}{3} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

f. La funzione h ha come derivata:

$$h'(x) = g(x) + 2 = \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -4xe^{x-1} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

La funzione h ha espressione analitica:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 2x + c & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 4e^{x-1}(1-x) - 4e^{-1} + c & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La costante c va scelta in modo che $h(-1) = 0$:

$$-\frac{1}{5} + \frac{4}{3} - 2 + c = 0 \Rightarrow c = \frac{13}{15}$$

Studiamo questa funzione:

- La funzione h è definita su $[-1, 1]$, è continua e non ha simmetrie.
- L'intersezione con l'asse y è $(0; \frac{13}{15})$. Per studiare la presenza di eventuali altri zeri, dobbiamo prima occuparci della monotonia della funzione.
- Come f , h è derivabile per $x \neq 0$ e non è derivabile in $x = 0$, in cui si ha un punto angoloso. La derivata sinistra è positiva, mentre quella destra è negativa.
- Studiamo il segno di h' per $x \in [-1, 1]$:
 - $x^4 - 4x^2 + 2 \geq 0$ se $x^2 = 2 \pm \sqrt{2}$, e quindi se $x = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$. Di questi valori, ci interessa solo quello compreso tra -1 e 0 : si tratta di $-\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \alpha \approx -0,7653$.
 - $-4xe^{x-1} \leq 0$ per ogni $x \geq 0$.

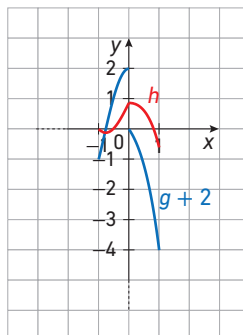
Quindi h è crescente su $[\alpha, 0]$ e decrescente su $[-1, \alpha]$ e $[0, 1]$. Ha massimi relativi in $x = -1$ e $x = 0$, un minimo relativo in $x = \alpha$ e un minimo relativo $x = 1$. Dato che:

$$h(-1) = 0 \text{ e } h(0) = \frac{13}{15}$$

il punto $x = -1$ è di massimo relativo, mentre $x = 0$ è di massimo assoluto.

- La funzione h verifica $h''(x) = f''(x)$ per ogni x , quindi dallo studio di f sappiamo che h è convessa per $x < 0$ ed è concava per $x > 0$.

A partire da queste informazioni otteniamo un grafico qualitativo di h :

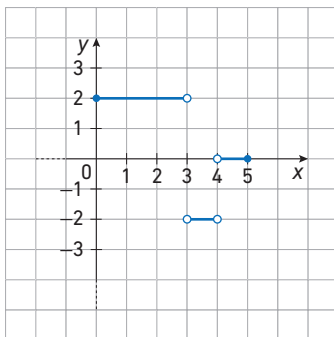


SVOLGIMENTO QUESITI

1. Il grafico della funzione è formato da segmenti. La funzione presenta un punto angoloso in corrispondenza dei punti di raccordo tra due segmenti, quindi per $x = 3$ e $x = 4$. Negli altri punti la derivata della funzione è data dalla pendenza di ciascun segmento. Si ha quindi:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ -2 & \text{se } 3 < x < 4 \\ 0 & \text{se } 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

Il grafico di f' è rappresentato in figura.



La funzione f non verifica le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo $[2, 4]$, dato che non è derivabile in $x = 3$.

2. La media integrale richiesta è:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$$

Riconosciamo che il numeratore è la metà della derivata del denominatore. Si ha quindi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx = \frac{1}{2} [\ln(1 + \sin 2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\ln 2}{2}$$

Il teorema della media integrale dice che, se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora esiste almeno un $c \in [a, b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Dato che la funzione integranda è non negativa, la media integrale in questo caso indica l'altezza di un rettangolo di base $\frac{\pi}{4}$ la cui area è equivalente a quella sotto il grafico di f tra 0 e $\frac{\pi}{4}$.

3. La funzione $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, dato che $x^2 + 2x + 4 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi f non ha asintoti verticali. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x + 4})$$

Per risolvere questo limite, moltiplichiamo e dividiamo per $-x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}$:

$$x + \sqrt{x^2 + 2x + 4} \cdot \frac{-x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}}{-x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}} = \frac{-x^2 + x^2 + 2x + 4}{-x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}} =$$

$$= \frac{2x + 4}{-x + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}} = \text{ } \leftarrow \text{ raccogliamo il termine } x \text{ al denominatore} \\ \text{ricordando che } x < 0, \text{ e quindi } |x| = -x$$

$$= \frac{2x + 4}{x \left(-1 - \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} \right)} = \frac{2 + \frac{4}{x}}{-1 - \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}$$

Quindi, per l'algebra dei limiti e le sue estensioni:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2 + \frac{4}{x}}{-1 - \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}} \right) = -1$$

Abbiamo trovato l'asintoto orizzontale sinistro $x = -1$.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}) = +\infty$$

quindi potrebbe esserci un asintoto obliquo. Per verificare se è così, calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} \right) = 2$$

Ora verifichiamo se esiste finito anche:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \sqrt{x^2 + 2x + 4})$$

Possiamo risolvere questo limite in modo analogo a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$-x + \sqrt{x^2 + 2x + 4} = \frac{x^2 - (x^2 + 2x + 4)}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}} = \frac{2 + \frac{4}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}} = 2$$

Abbiamo trovato l'asintoto obliquo destro di equazione $y = 2x + 2$.

4. In un opportuno sistema di riferimento, un cono di altezza $0 \leq h \leq 2R$ inscritto in una sfera di raggio R ha come base un cerchio che verifica:

$$z = R - h$$

Di conseguenza, la circonferenza corrispondente verifica l'equazione:

$$x^2 + y^2 + (R - h)^2 = R^2$$

Il raggio di base del cono di altezza h inscritto nella sfera di raggio R è quindi

$\sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{2hR - h^2}$. Il volume del cono in funzione dell'altezza è:

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi (2hR - h^2)h = \frac{1}{3} \pi (2Rh^2 - h^3)$$

Dobbiamo massimizzare V con il vincolo $0 \leq h \leq 2R$. Dato che V è una funzione polinomiale, possiamo applicare il teorema di Fermat. Abbiamo:

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \pi (4Rh - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = 0 \vee h = \frac{4}{3}R$$

In corrispondenza di $h = 0$ si ha il volume minimo, mentre in corrispondenza di $h = \frac{4}{3}R$ si ha il volume massimo, pari a:

$$V\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{1}{3} \pi \left(2R \left(\frac{4}{3}R \right)^2 - \left(\frac{4}{3}R \right)^3 \right) = \frac{32}{81} \pi R^3$$

5. Per calcolare la retta tangente al grafico di F nel suo punto di ascissa $x = 0$ dobbiamo calcolare $F'(0)$. La funzione $f(t) = \frac{e^t}{t^2 + 1}$ è continua e quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha:

$$F'(0) = f(0) = \frac{e^0}{0^2 + 1} = 1$$

Dato che $F(0) = 0$, la retta tangente al grafico di F nel suo punto di ascissa $x = 0$ ha equazione $y = x$.

6. La funzione h è continua, quindi f è derivabile (e, di conseguenza, anche continua). Dato che h e f sono definite sull'intervallo chiuso e limitato $[0, 7]$, a f si può applicare il teorema di Weierstrass. Per la ricerca dei punti di estremo assoluto, possiamo applicare anche il teorema di Fermat: tali punti vanno cercati tra gli estremi dell'intervallo, quindi 0 e 7, e quelli in cui si annulla la derivata di f , cioè 4 e 6.

Per quanto noto dal grafico, utilizzando l'interpretazione di integrale come *area con il segno della funzione*, si ha:

$$f(0) = \int_0^0 h(t)dt = 0$$

$$f(4) = -\frac{1}{2}(2^2 \cdot \pi) = -2\pi$$

$$f(6) = f(4) + \int_4^6 h(t)dt = -2\pi + \frac{1}{2}(1^2 \cdot \pi) = -\frac{3}{2}\pi$$

$$f(7) = f(6) + \int_6^7 h(t)dt = -\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{7}{4}\pi$$

Confrontando i valori, ricaviamo che il punto di massimo assoluto è $x = 0$, mentre quello di minimo assoluto è $x = 4$.

7. Per calcolare un integrale con la tecnica di sostituzione, dobbiamo calcolare gli estremi di integrazione rispetto alla nuova variabile d'integrazione scelta.

Se poniamo $t = 2x$, ovvero $x = \frac{t}{2}$, abbiamo che:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{t}{2} = 0 \quad x = 3 \Rightarrow \frac{t}{2} = 3 \Rightarrow t = 6$$

Se poniamo $t = \frac{x}{2}$, cioè $x = 2t$, abbiamo che:

$$x = 0 \Rightarrow 2t = 0 \quad x = 3 \Rightarrow 2t = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Di conseguenza, possiamo calcolare:

$$\int_0^3 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^6 f(x)dx = \frac{11}{2}$$

8. Il limite si presenta come forma indeterminata di tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$. Effettuiamo il cambiamento di variabile $t = x - \pi$ e ricordiamo che $\sin(t + \pi) = -\sin t$. Il limite diventa:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \pi)}{e^\pi - e^{t+\pi}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{e^\pi(1 - e^t)}$$

Ora ricordiamo i limiti notevoli:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

Otteniamo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{e^\pi(1 - e^t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin t}{t} \cdot \frac{t}{e^\pi(1 - e^t)} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-1 \cdot \left(-\frac{1}{e^\pi} \right) \right) = \frac{1}{e^\pi}$$