

NOME E COGNOME CLASSE DATA

PROBLEMA 1

È data la famiglia di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{(n + \ln x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

- a. Trova, se esiste un valore di α che rende continue tutte le funzioni della famiglia considerata. In caso contrario, classifica l'eventuale punto di discontinuità.

Supponi ora che $\alpha = 0$.

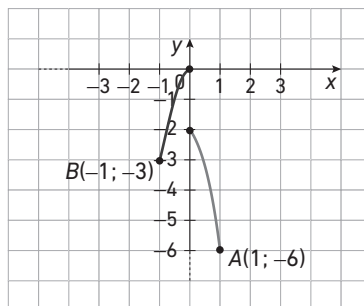
- b. Dimostra che tutte le funzioni $f_n(x)$ hanno un solo punto di massimo assoluto e che il rapporto tra i punti di massimo assoluto di $f_n(x)$ e $f_{n+1}(x)$ è costante.
- c. Determina l'equazione cartesiana del luogo dei punti cui appartengono i massimi delle $f_n(x)$.
- d. Studia la funzione $f_2(x)$ e tracciane il grafico.
- e. Trova l'area delimitata dalla curva $y = \frac{f_2(x)}{x}$, dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = e^{-2}$ e $x = e^{-1}$.
- f. Deduci dallo studio di f_2 il grafico della funzione:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2 + \ln |x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 2

È data $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

In figura è mostrato il grafico γ della sua derivata $y = g(x)$.



- a. Studia la derivabilità, la monotonia e la concavità della funzione $y = f(x)$ che verifica $f(0) = 0$. Indica gli eventuali punti di estremo relativo e assoluto.

Traccia un possibile grafico qualitativo di $y = f(x)$ e $y = f''(x)$.

- b. Supposto che:

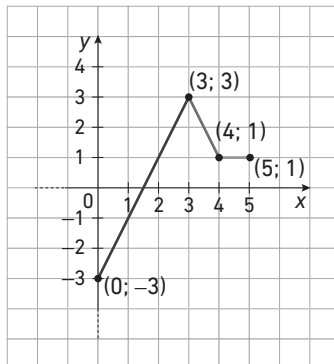
$$g(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -4xe^{x-1} - 2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

e che $f(0) = 0$, trova l'espressione analitica di $y = f(x)$.

- c. Determina il numero degli zeri della funzione $y = f(x)$ e motiva la loro eventuale esistenza ed eventuale unicità.
- d. Calcola l'area della regione piana delimitata dall'asse delle ascisse, dall'asse delle ordinate, dal grafico di $y = f(x)$ e dalla retta $x = -1$.
- e. Sia ora $h: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $h'(x) = g(x) + 2$ e $h(-1) = 0$. Traccia un possibile grafico di $y = h(x)$, individuando in modo qualitativo la presenza di massimi e minimi senza ricercare il minimo assoluto.

QUESITI

1. Nella figura è rappresentato il grafico della funzione $y = f(x)$. Stabilisci dove la funzione è derivabile e traccia il grafico della sua derivata prima. Stabilisci inoltre se nell'intervallo $[2, 4]$ la funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle.



2. Calcola la media integrale della funzione:

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} \quad \text{in} \quad \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Enuncia poi il teorema della media integrale e descrivi qualitativamente il significato del teorema per la funzione considerata.

3. Determina l'equazione degli eventuali asintoti di

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

4. Tra tutti i coni iscritti in una sfera di raggio R , individua quello che ha il massimo volume.

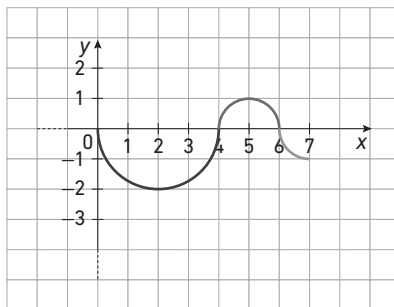
(Suggerimento: il volume V di un cono circolare che ha raggio di base r e altezza h è $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)

5. Trova la retta tangente al grafico di:

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2 + 1} dt$$

nel suo punto di ascissa $x = 0$.

6. La funzione $h : [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ è rappresentata in figura; il suo grafico è costituito da archi di circonferenza.



Sia $f(x) = \int_0^x h(t) dt$. Determina se a f è possibile applicare il teorema di Weierstrass, e, in caso affermativo, trova i punti di massimo e minimo assoluto.

7. Sia $f(x)$ una funzione continua definita su $\mathbb{R}$ tale che $\int_0^6 f(x) dx = 11$. Dei seguenti integrali

$$\int_0^3 f(2x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^3 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Indica quale e spiegate il motivo.

8. Senza fare uso del teorema di De L'Hôpital, calcola:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{e^\pi - e^x}$$