Simulazione d'Esame svolta

seconda prova di Matematica costituita
da 2 problemi e 8 quesiti
sul modello delle prove ministeriali

A cura di Giovanna Guidone

PROBLEMA 1

Lucia prepara un caffè bollente e lo versa nella tazza. La temperatura iniziale del caffè è $T_0 = 80$ °C e quella della stanza è $T_a = 20$ °C. Il caffè inizia a raffreddarsi e la sua temperatura come funzione del tempo è data dalla legge:

$$T(t) = T_a - (T_a - T_0)\,e^{-kt}$$

dove k rappresenta una costante.

a. Trova l’unità di misura di k, supponendo che il tempo sia misurato in minuti.

Posto ora $k = 0{,}1$ (nell’unità di misura trovata in **a.**):

b. trova quanto tempo ci mette il caffè a scendere alla temperatura $T_f = 40$ °C;
c. traccia il grafico della funzione $T(t)$, individuandone l’asintoto;
d. spiega il significato fisico dell’asintoto di $T(t)$.

Lucia si mette a riflettere sul fatto che, verosimilmente, se la temperatura ambiente fosse più alta (ad esempio, se fosse estate), il tempo di raffreddamento del caffè sarebbe più lungo. Decide quindi di studiare la funzione che descrive il tempo τ di raffreddamento da $T_0 = 80$ °C a $T_f = 40$ °C in funzione della temperatura ambiente.

e. Scrivi τ come funzione di T_a.
f. Qual è il dominio di $\tau(T_a)$ relativamente al contesto analizzato? Per quale motivo non si possono accettare valori di $T_a \geqslant 80$?
g. Traccia il grafico di $\tau(T_a)$ nell’intervallo $T_a \in [0, 40)$ e spiega il significato dell’asintoto.

PROBLEMA 2

Considera la seguente famiglia di funzioni, al variare del parametro reale k:

$$f_k(x) = \frac{x^2}{x^2 - k}$$

a. Spiega l’affermazione seguente: “tutti i grafici delle funzioni f_k tranne uno hanno un punto comune”.
b. Trova il dominio di f_k, distinguendo i casi al variare di $k \in \mathbb{R}$.
c. Stabilisci la presenza di eventuali asintoti, distinguendo i casi al variare di $k \in \mathbb{R}$.
d. Studia la monotonia delle funzioni f_k, individuando gli eventuali punti di massimo e/o minimo.
e. Considera ora la curva $g(x) = f_{-1}(x)$ e tracciane il grafico, individuando anche gli eventuali punti di flesso.
f. Trova l’area della regione di piano del primo quadrante compresa tra l’asse $x = 0$, la retta $y = 1$ e il grafico di g.

In un sistema di riferimento cartesiano, considera la circonferenza $C: x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ e la retta $r: y = 1$. Prendi il fascio di rette passanti per l’origine: interseca una sua retta con C e con r individuando, rispettivamente, due punti M e N (senza contare l’origine degli assi, intersezione di qualunque retta del fascio con la circonferenza).

g. Dimostra che il luogo dei punti P che hanno l’ascissa di N e l’ordinata di M è il grafico della funzione $h(x) = 1 - g(x)$. Questa curva si chiama *versiera di Maria Gaetana Agnesi*.

QUESITI

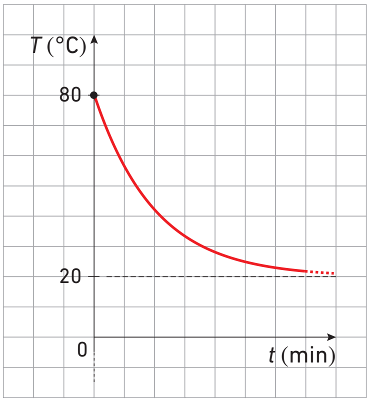
1. Dimostra che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è lunga metà della stessa ipotenusa.
2. Si circoscrive un cono circolare retto a una semisfera di raggio R. Qual è il raggio di base del cono che ha minore superficie laterale possibile?
3. Filippo lancia una moneta: se esce testa va a destra, se esce croce va a sinistra. Dopo dieci lanci, qual è la probabilità che si trovi 4 passi a destra rispetto all'inizio?
4. Dimostra che, dati due punti A e B della parabola $y = x^2$, con $y_A = y_B$, l'area della regione individuata dalla parabola e dal segmento AB è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo che ha come due lati opposti il segmento AB e la sua proiezione sull'asse x.
5. Trova i massimi e i minimi della funzione $\int_0^t \arctan x \, dx$, per $t \in [0, 1]$.
6. Trova per quali valori dei parametri reali a e b la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} bx^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
risulta continua e derivabile in $x = 0$.
7. Dopo aver trovato la distanza R tra il punto $P(1; 1; 1)$ e l'origine, individua il piano che passa per P e che è tangente alla sfera di centro l'origine e raggio R.
8. Individua gli eventuali asintoti obliqui della funzione $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} + 2x$.

SVOLGIMENTO PROBLEMA 1

a. Poiché l'esponente di e, cioè $-kt$, deve essere adimensionale, k deve essere espressa in min^{-1}.

b. Sostituiamo i valori dati nella legge, ponendo $T(t) = T_f$ e ricavando t:
$$40 = 20 - (20 - 80)e^{-0,1t} \quad \Rightarrow \quad 20 = 60e^{-\frac{t}{10}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{t}{10} = \ln\frac{20}{60} \quad \Rightarrow \quad t = 10\ln 3$$
Otteniamo così che il tempo necessario per scendere a 40 °C è $t \approx 11$ min.

c. Calcoliamo il limite di $T(t)$ per $t \to +\infty$:
$$\lim_{t \to +\infty} \left(20 + 60e^{-\frac{t}{10}}\right) = 20$$
Allora la funzione ha come asintoto orizzontale destro $T = 20$ °C. Il grafico della funzione (che per il modello considerato rappresentiamo per $t \geqslant 0$) è:



d. La temperatura $T = 20$ °C rappresenta il limite cui tende la temperatura del caffè raffreddandosi. Nella realtà, il caffè dopo un po' di tempo raggiunge i 20 °C. Questo è dovuto al fatto che la legge di Newton descrive il fenomeno in modo approssimato, soprattutto se la temperatura del corpo è vicina alla temperatura ambiente. Da questo modello impariamo, però, che se T_0 e T_a sono vicine, il fenomeno diventa molto lento.

e. Riscriviamo la legge ponendo $T_0 = 80$ °C, $T_f = 40$ °C, e lasciando T_a come variabile:

$$40 = T_a + (80 - T_a)\, e^{-\frac{\tau}{10}} \quad \Rightarrow \quad \frac{40 - T_a}{80 - T_a} = e^{-\frac{\tau}{10}}$$

dove τ corrisponde al tempo di raffreddamento, che vogliamo scrivere come funzione di T_a. Affinché la quantità a sinistra dell'uguale sia positiva, osserviamo che deve essere:

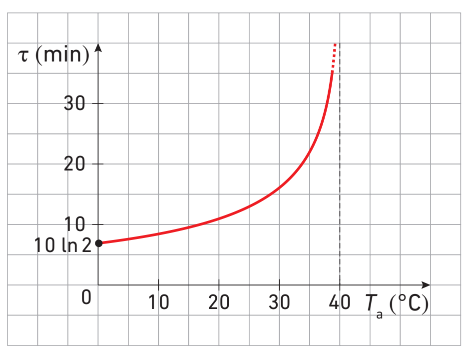
$$T_a < 40 \ \vee T_a > 80$$

Sotto queste condizioni, possiamo passare al logaritmo naturale:

$$-\frac{\tau}{10} = \ln\left(\frac{40 - T_a}{80 - T_a}\right) \quad \Rightarrow \quad \tau = 10 \ln\left(\frac{80 - T_a}{40 - T_a}\right)$$

f. Poiché τ è positivo, deve essere $T_a < 40$ °C.
Infatti, se fosse 40 °C $\leqslant T_a \leqslant$ 80 °C, il corpo non riuscirebbe a raffreddarsi fino a 40 °C (e infatti nella risoluzione dell'equazione abbiamo ottenuto proprio che non si ha soluzione per questi valori); se fosse invece $T_a > 80$ °C, il corpo non si raffredderebbe (l'equazione in questo caso avrebbe soluzione negativa).

g. Studiamo la funzione $\tau(T_a) = 10 \ln\left(\frac{80 - T_a}{40 - T_a}\right)$ per $0 \leqslant T_a < 40$.
Si tratta di una funzione crescente perché, nel dominio, è composizione di funzioni crescenti (che la frazione algebrica argomento del logaritmo sia crescente lo si può verificare in tanti modi, ad esempio scrivendola come $\frac{80 - T_a}{40 - T_a} = \frac{40 + 40 - T_a}{40 - T_a} = \frac{40}{40 - T_a} + 1$). Pertanto, presenta un punto di minimo in $(0;\ 10 \ln 2)$.
L'asintoto verticale $T_a = 40$ descrive il fatto che, se la temperatura ambiente si avvicina a 40 °C, il raffreddamento è sempre più lungo.



SVOLGIMENTO PROBLEMA 2

a. Osserviamo che $f_k(0) = 0, \forall k \in \mathbb{R}_0$. Per $k = 0$, la funzione $f_0(x) = \frac{x^2}{x^2}$ ha dominio $\mathbb{R}_0$, pertanto il punto $(0;\ 0)$ è comune al grafico di tutte le f_k tranne f_0.

b. Deve essere $x^2 - k \neq 0$. Allora il dominio delle funzioni è:

$$\mathbf{D}(f_k) = \mathbb{R} \qquad \text{se } k < 0$$
$$\mathbf{D}(f_k) = \mathbb{R}_0 \qquad \text{se } k = 0$$
$$\mathbf{D}(f_k) = \mathbb{R} \backslash \{\pm\sqrt{k}\} \quad \text{se } k > 0$$

c. Poiché:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_k(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - k} = 1 \quad \forall k$$

esiste sempre un asintoto orizzontale destro e sinistro, che è la retta $y = 1$.

Poiché inoltre, per $k > 0$, $\lim_{x \to \pm\sqrt{k}} f_k(x)$ è infinito, per tali valori di k esistono anche i due asintoti verticali $x = \pm\sqrt{k}$.

d. Studiamo la monotonia delle funzioni f_k.

- Se $k = 0$, la funzione è costante e uguale a 1 su $\mathbb{R}_0$.
- Se $k \neq 0$, calcoliamo la derivata, osservando innanzitutto che possiamo scrivere le funzioni come:

$$f_k(x) = \frac{x^2}{x^2 - k} = \frac{x^2 - k + k}{x^2 - k} = 1 + \frac{k}{x^2 - k}$$

Allora abbiamo che:

$$f_k'(x) = \left(1 + \frac{k}{x^2 - k}\right)' = -\frac{2kx}{(x^2 - k)^2}$$

- Se $k > 0$:

$$f_k'(x) > 0 \text{ se e solo se } x < 0$$

Inoltre, la funzione ha un massimo per $x = 0$.

- Se $k < 0$:

$$f_k'(x) > 0 \text{ se e solo se } x > 0$$

Inoltre, la funzione ha un minimo per $x = 0$.

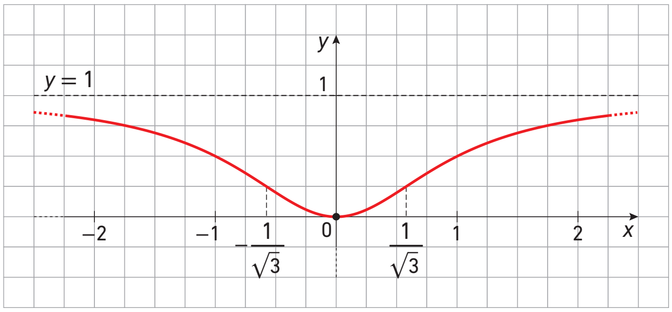
e. La funzione considerata è $g(x) = f_{-1}(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Come abbiamo detto nei punti precedenti, la funzione g:

- ha dominio $\mathbb{R}$;
- il suo grafico passa per il punto $(0; 0)$;
- ha asintoto orizzontale $y = 1$;
- decresce per $x < 0$, ha un minimo per $x = 0$, cresce per $x > 0$.

Osserviamo inoltre che si tratta di una funzione pari.
A partire dalla derivata prima $g'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, calcoliamo la derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{2(x^2 + 1)^2 - 2x \cdot 4x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^4}[2(x^2 + 1) - 8x^2] = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^4}(-6x^2 + 2)$$

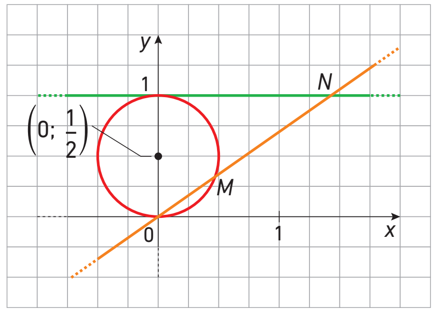
I punti di flesso si hanno per $-6x^2 + 2 = 0$, cioè per $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; la concavità è rivolta verso l'alto tra questi due valori e rivolta verso il basso per $x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee x > \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Il grafico della funzione è:



f. L'area richiesta è:

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{x^2 + 1}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = \lim_{b \to +\infty} [\arctan x]_0^b = \lim_{b \to +\infty} (\arctan b) = \frac{\pi}{2}$$

g. La circonferenza C: $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ha centro $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$. Consideriamo una generica retta del fascio passante per l'origine $y = mx$. Rappresentiamo la situazione descritta nel testo dell'esercizio:



L'ascissa di N si trova ponendo l'ordinata di un punto della retta $y = mx$ uguale a 1. Otteniamo:

$$1 = m \cdot x_N \Rightarrow x_N = \frac{1}{m}$$

Troviamo ora l'ordinata di M, sostituendo nell'equazione della circonferenza $x = \frac{y}{m}$:

$$\frac{y^2}{m^2} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{m^2} + 1\right)y^2 - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y\left[\left(\frac{1}{m^2} + 1\right)y - 1\right] = 0$$

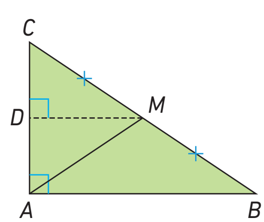
La soluzione $y = 0$ ci fornisce l'origine degli assi, ma a noi interessa l'altra intersezione tra la retta del fascio e la circonferenza:

$$y_M = \frac{1}{\left(\frac{1}{m^2} + 1\right)} = \frac{m^2}{1 + m^2} = \frac{\frac{1}{x_N^2}}{1 + \frac{1}{x_N^2}} = \frac{1}{x_N^2 + 1}$$

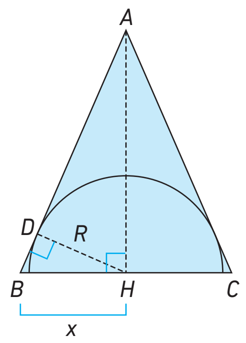
Allora il luogo dei punti P che hanno l'ascissa di N e l'ordinata di M è il grafico della funzione $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} = 1 - g(x)$.

SVOLGIMENTO QUESITI

1. Supponiamo di avere un triangolo rettangolo ABC, con angolo retto in A, e che M sia il punto medio dell'ipotenusa BC.
Ci sono tanti modi per dimostrare che $2AM = BC$. Diamo qui una possibile dimostrazione.
Costruiamo il segmento MD perpendicolare ad AC, con D sul lato AC.



Per il teorema di Talete, poiché $CM \cong MB$ e i due segmenti MD e AB sono paralleli, si ha che $CD \cong DA$. Ma allora i triangolo MDC e MDA sono congruenti (perché hanno MD in comune, $M\hat{D}C \cong M\hat{D}A$ e $CD \cong DA$). Allora $AM \cong MC$, quindi AM è metà di BC.



2. Chiamiamo x il raggio di base del cono ($x > R$).
Esprimiamo l'apotema AB del cono in funzione di x e R.
Osserviamo che i triangoli AHB e HBD sono simili, perciò:

$$AB : BH = BH : BD$$

da cui otteniamo:

$$AB = \frac{BH^2}{BD} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}$$

Allora la superficie laterale del cono è:

$$A_l = \frac{\pi x^3}{\sqrt{x^2 - R^2}}$$

Consideriamo R costante e x variabile. Calcoliamo la derivata prima di $A_l(x)$ per determinare il minimo della funzione:

$$A_l'(x) = \pi \frac{3x^2\left(\sqrt{x^2 - R^2}\right) - x^3\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - R^2}}\right)}{x^2 - R^2} = \pi \frac{3x^2(x^2 - R^2) - x^4}{\sqrt{(x^2 - R^2)^3}} = \pi \frac{2x^4 - x^2R^2}{\sqrt{(x^2 - R^2)^3}}$$

La derivata si annulla per $x = 0$ (non accettabile, perché $x > R$) e per $2x^2 = R^2$, cioè per $x = \frac{1}{\sqrt{2}}R$.
Si tratta di un minimo perché $A_l'(x) < 0$ per $R < x < \frac{1}{\sqrt{2}}R$ e $A_l'(x) > 0$ per $x > \frac{1}{\sqrt{2}}R$.

L'area laterale minima si ha in corrispondenza di $x = \frac{1}{\sqrt{2}}R$. Ciò in particolare accade quando l'angolo $H\hat{B}A$ è $\frac{\pi}{4}$.

3. Se Filippo si trova 4 passi a destra in 10 lanci, vuol dire che ha fatto 7 passi a destra e 3 a sinistra. L'esercizio ci chiede quindi la probabilità che si ottengano 7 "successi" su 10 lanci, con probabilità $\frac{1}{2}$ per ciascun successo, cioè stiamo considerando una binomiale di parametri $(n, p) = \left(10, \frac{1}{2}\right)$ e dobbiamo calcolare:

$$p(7) = \binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10!}{7!3!}\frac{1}{2^{10}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2^{11}} = \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}{3 \cdot 2^{11}} = \frac{15}{128}$$

4. Se due punti A e B sulla parabola di equazione $y = x^2$ sono tali che $y_A = y_B$, deve essere $x_A = -a$ e $x_B = a$ (e, di conseguenza, $y_A = y_B = a^2$). L'area individuata dalla parabola e dal segmento AB è:

$$\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx = \left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}a^3$$

La base del rettangolo che ha per lati il segmento AB e la sua proiezione sull'asse x è $2a$, la sua altezza è a^2. Allora l'area di questo rettangolo è $2a \cdot a^2 = 2a^3$. L'area che abbiamo trovato in precedenza è proprio $\frac{2}{3}$ di questa area.

5. La funzione $f(t) = \arctan t$ è una funzione continua su $[0, 1]$, quindi integrabile su tale intervallo.
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $F(t) = \int_0^t \arctan x\,dx$ è derivabile in $[0, 1]$ e $F'(t) = f(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$.
Dato che $F'(t) = \arctan t > 0$ in $(0, 1]$, ne segue che $F(t)$ è una funzione crescente. Questo implica che il minimo e il massimo sono assunti dalla funzione $F(t)$ agli estremi dell'intervallo.
Il minimo è:

$$F(0) = \int_0^0 \arctan x\,dx = 0$$

mentre il massimo è:

$$F(1) = \int_0^1 \arctan x\,dx$$

Per trovare questo valore calcoliamo prima l'integrale indefinito, operando per parti:

$$\int 1 \cdot \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1 + x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$$

Allora il massimo della funzione è:

$$F(1) = \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

6. La funzione risulta continua se:

$$\lim_{x\to 0} b x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = f(0) = a$$

Dobbiamo calcolare, quindi, $\lim_{x\to 0} b x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.
Dato che $-1 \leqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 1$, si ha:

$$0 \leqslant \left|b x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leqslant |b x^2| \quad \text{per ogni } x \neq 0$$

Per il teorema dei due carabinieri ne segue che $\lim_{x\to 0} b x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$, quindi $a = 0$.

Per avere la derivabilità in $x = 0$, dobbiamo imporre che esista e sia finito il limite del rapporto incrementale. Abbiamo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{b h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\left(bh \operatorname{sen}\frac{1}{h}\right) = 0$$

per il teorema dei due carabinieri, qualunque sia il valore di b.
In conclusione, per $a = 0$ e $\forall b \in \mathbb{R}$, la funzione è continua e derivabile in $x = 0$.

7. La distanza tra il punto $P(1; 1; 1)$ e l'origine è $R = \sqrt{3}$.
Consideriamo la sfera di centro l'origine e raggio R; essa passa per P e in tale punto il piano tangente è perpendicolare a OP. Possiamo perciò determinare l'equazione del piano, imponendo che passi per P e che abbia come direzione normale il vettore $\vec{n} = (1; 1; 1)$:

$$(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

Perciò il piano cercato ha equazione $x + y + z - 3 = 0$.

8. Consideriamo i limiti per $x \to \pm\infty$ della funzione f:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right)\frac{\sqrt{4x^2+1} - 2x}{\sqrt{4x^2+1} - 2x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1} - 2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2+1} - 2x} = 0$$

Poiché esiste un asintoto orizzontale sinistro, l'asintoto obliquo può eventualmente essere solo destro. Verifichiamo allora il comportamento della funzione per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} + 2x\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} + 2\right) = 4$$

Se esiste un asintoto obliquo, avrà coefficiente angolare $m = 4$. Lo verifichiamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x - 4x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right)\frac{\sqrt{4x^2+1} + 2x}{\sqrt{4x^2+1} + 2x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1} + 2x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1} + 2x}\right) = 0$$

Concludiamo che la funzione f ha un asintoto obliquo destro, che è $y = 4x$.