PROBLEMA 1

Considera la famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = k\sqrt{1-x^2} + |x| - 1,\ k \in \mathbb{R}_0^+$$

a. Determina il dominio delle funzioni f_k.
b. Studia la simmetria delle f_k.
c. Dimostra che tutte le f_k hanno due punti comuni e determina le loro coordinate.
d. Dimostra che le f_k sono non negative se e solo se $k \geqslant 1$.
e. Dimostra che le funzioni f_k hanno tutte due massimi assoluti.
f. Determina k in modo tale che il massimo assoluto si abbia per $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Verificato che la condizione richiesta è verificata per $y = f_1(x)$,

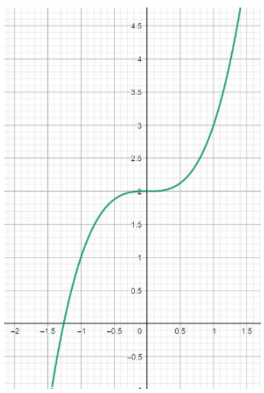
g. studia la funzione f_1 e rappresenta il suo grafico.
h. Detto γ_1 il grafico della funzione f_1 e γ_2 il grafico della funzione $y = -f_1(x)$, trova l'area individuata dalle due regioni limitate di piano individuate da γ_1 e γ_2

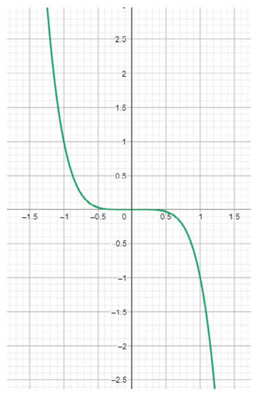
PROBLEMA 2

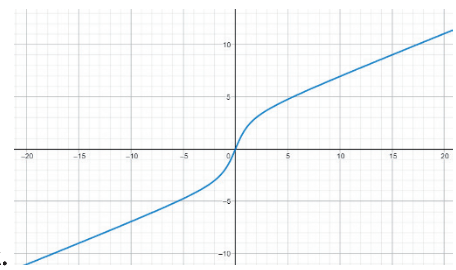
Sia F una funzione derivabile definita su un insieme $\mathbf{D}$ tale che $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbf{D}$. Sia inoltre $f(x) = F'(x)$ su $\mathbf{D}$.
Considera la funzione $g : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathbf{D} \text{ e } x < 0 \\ F(x) & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a. I tre grafici raffigurati presentano tre possibili funzioni F. Solo una di esse rende continua la funzione g: indica quale giustificando la tua risposta.

a. 

b. 

c. 

Supponiamo ora che sia $F(x) = 2\ln(x+1) + ax^2 + bx$.

b. Individua i valori di a e b per i quali la funzione g risulta continua e derivabile su $\mathbf{D}$.

c. Verificato che $a = 1$ e $b = -2$, studia la funzione g così ottenuta e tracciane il grafico. (Tralascia lo studio della convessità).

Sia ora $h(x) = x^2 - 2x$.

d. Considera il segmento ottenuto intersecando la retta di equazione $x = \alpha$ e la parte di piano delimitata dai grafici di h e g per $\alpha \in \mathbb{R}$, $-1 < \alpha < 0$. Esiste un valore di α per il quale tale segmento ha lunghezza massima?

e. Considerata una retta di equazione $x = k$, con $k \in \mathbb{R}_0^+$, calcola l'area della regione piana delimitata dal grafico di g, da quello di h e dalle rette $x = 0$ e $x = k$.

f. Calcola infine il limite per $k \to +\infty$ dell'area trovata al punto precedente.

SVOLGIMENTO PROBLEMA 1

a. Tutte le funzioni f_k richiedono che sia definita la radice $\sqrt{1-x^2}$. Per cui si deve avere:

$$1-x^2 \geqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Ricaviamo che il dominio delle funzioni f_k è l'intervallo $[-1, 1]$.

b. Il dominio delle f_k è simmetrico rispetto all'origine, possiamo quindi chiederci se le funzioni presentino qualche simmetria. Si ha:

$$f_k(-x) = k\sqrt{1-(-x)^2} + |-x| - 1 = k\sqrt{1-x^2} + |x| - 1 = f(x)$$

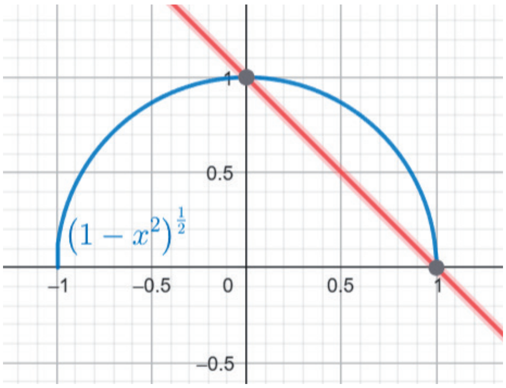
dunque le f_k sono pari.

c. Il termine che dipende da k si annulla per $x = \pm 1$; pe questi valori si ha $f_k(\pm 1) = 0$. I due punti in comune ai grafici delle funzioni sono perciò $(\pm 1; 0)$. Per $x \neq \pm 1$ si ha che $k \neq h$ implica $k\sqrt{1-x^2} \neq h\sqrt{1-x^2}$, quindi non ci sono altri punti in comune oltre ai due già trovati.

d. Osserviamo che se $k > h$, allora $f_k(x) > f_h(x)$ per ogni $x \in (-1, 1)$.
Dato che le funzioni sono pari, studiamo quanto accade per $x \geqslant 0$. Iniziamo a considerare il caso $k = 1$:

$$\sqrt{1-x^2} + x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \geqslant 1 - x$$

La disequazione si può rappresentare graficamente: cerchiamo i valori di $x \in [0, 1]$ tali per cui l'arco di circonferenza di equazione $y = \sqrt{1-x^2}$ "sta sopra" la retta di equazione $y = 1 - x$.



Vediamo che la disequazione è verificata per ogni $x \in [0, 1]$, come volevamo. Grazie all'osservazione fatta all'inizio del punto d., questo ci consente di dimostrare che, se $k \geqslant 1$, allora $f_k(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in [-1, 1]$.
Per $0 < k \leqslant 1$, osserviamo che $f_k(0) = k - 1 < 0$, e quindi f_k assume anche valori negativi. Di conseguenza, f_k è non negativa se e solo se $k \geqslant 1$.

e. Le funzioni sono continue su $[-1, 1]$ e derivabili per $x \neq \pm 1$ e $x \neq 0$. Per il teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo assoluto tra i punti di non derivabilità e quelli in cui la derivata prima si annulla. Studiamo sempre il caso $x \geqslant 0$, riportando per simmetria i risultati per $x \leqslant 0$.
Per $0 \leqslant x < 1$ abbiamo: $f_k'(x) = 1 - \dfrac{kx}{\sqrt{1-x^2}}$, da cui $f_k'(x) > 0$ se e solo se $\sqrt{1-x^2} - kx > 0$.
Risolviamo l'equazione associata:

$$\sqrt{1-x^2} - kx = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = kx \Rightarrow 1 - x^2 = k^2x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$$

Vista la simmetria della funzione, la sua monotonia si può riassumere nel seguente schema.

	-1		$-\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$		1
$D(f)$	●	—	—	—	—	—	—	—	●
Segno di f'	$\nexists$	+++++	0	-----	$\nexists$	+++++	0	-----	$\nexists$
monotonia di f		↗		↘		↗		↘	

Concludiamo che i due punti di massimo assoluto di f_k sono $x = \pm\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$.

Osserviamo, anche se non richiesto, che $x = 0$ e $x = \pm 1$ sono punti di minimo in cui si ha $f(0) = k - 1$ e $f(\pm 1) = 0$. Se dunque $k > 1$ il minimo assoluto si ha negli estremi del dominio $x = \pm 1$, altrimenti si ha in $x = 0$.

f. Affinché si abbia $\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, occorre che $k = 1$.

g. Nei punti precedenti abbiamo già studiato dominio, segno, valori assunti agli estremi del dominio, continuità, derivabilità e punti di estremo della funzione f_1. La funzione chiaramente non ha asintoti. Per quanto visto al punto **e.**:

$$f_1'(x) \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \geqslant x \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

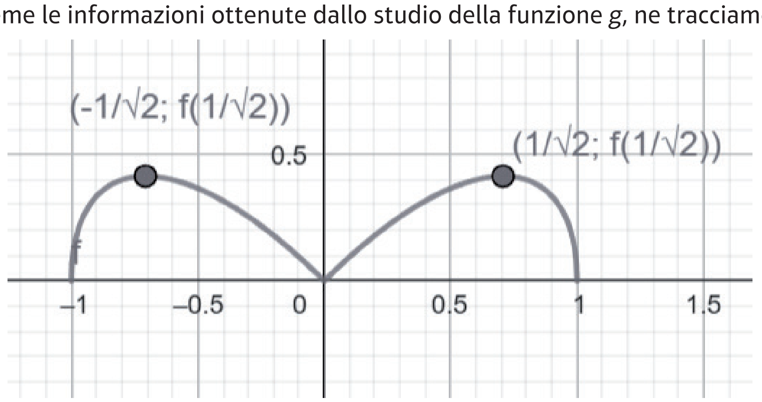
Ricaviamo che f_1 è crescente su $\left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e su $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, mentre è decrescente su $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$ e su $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$.

Per $0 \leqslant x < 1$ si ha:

$$f_1''(x) = -\frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$$

Dunque $f_1''(x) < 0$ per ogni $0 \leqslant x < 1$. Di conseguenza, f è concava separatamente su $[-1, 0]$ e $[0, 1]$. Non possiamo dire che f_1 è concava su $[-1, 1]$ in quanto f_1 non è derivabile su tutto l'intervallo, ma ha un punto angoloso in $x = 0$.

Mettendo insieme le informazioni ottenute dallo studio della funzione g, ne tracciamo il grafico:



h. Tenendo conto delle simmetrie delle funzioni f_1 e $-f_1$, l'area cercata è:

$$4\int_0^1 f_1(x)dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2} + x - 1dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx + 4\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - 2$$

Ricordiamo che $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ si può interpretare geometricamente come l'area della porzione di cerchio di equazione $x^2 + y^2 \leqslant 1$ che giace nel primo quadrante: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

Sommando i contributi dei due integrali abbiamo:

$$4\int_0^1 f_1(x)dx = \pi - 2$$

SVOLGIMENTO PROBLEMA 2

a. Affinché g sia continua, occorre che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = F(0)$. Dato che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} F'(x) = F'(x)$, dobbiamo trovare la funzione F che verifica $F(0) = F'(0)$. Il grafico (a) passa per (0; 2). Questo significa che $F(0) = 2$. Però $F'(0) = 0$, quindi g non può essere continua in $x = 0$. Un discorso analogo vale per il grafico (c), per il quale si ha $F(0) = 0$ e $F'(0) > 0$.
Il grafico (b) passa per (0; 0). In questo caso, si ha $F(0) = F'(x) = 0$, per cui g risulta continua nel suo dominio.

b. Se $F(x) = 2\ln(x+1) + ax^2 + bx$, allora $\mathbf{D} = (-1, +\infty)$ e $f(x) = 2\left(ax + \frac{1}{1+x}\right) + b$ per $x > -1$.
Inoltre:

$$g(x) = \begin{cases} 2\left(ax + \frac{1}{1+x}\right) + b & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2\ln(x+1) + ax^2 + bx & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Affinché g sia continua si deve avere $f(x) = F(x)$, ovvero:

$$2 + b = 2\ln(1) \Rightarrow b = -2$$

Invece per la derivabilità deve essere $f'(0) = F'(0)$. Dato che $f'(x) = 2\left(a - \frac{1}{(x+1)^2}\right)$, l'equazione diventa:

$$2\left(a - \frac{1}{1}\right) = 2 - 2 \Rightarrow a = 1$$

In conclusione, $a = 1$ e $b = -2$, quindi:

$$g(x) = \begin{cases} 2\left(x + \frac{1}{1+x}\right) - 2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2\ln(x+1) + x^2 - 2x & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

c. Studiamo la funzione g.

- Il dominio di g è $\mathbf{D} = (-1, +\infty)$. Il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, di conseguenza la funzione non è né pari né dispari.
- Risolviamo l'equazione $g(x) = 0$. Per $-1 < x \leqslant 0$ l'equazione diventa:

  $$2\left(x + \frac{1}{1+x}\right) - 2 = 0 \Rightarrow \frac{x(1+x) + 1 - 1 - x}{1+x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

  Per $x \geqslant 0$ si ha:

  $$F(x) = 2\ln(x+1) + x^2 - 2x = 0$$

  Sappiamo già che una soluzione è $x = 0$. Inoltre $F'(x) = 2\left(x + \frac{1}{1+x}\right) - 2 > 0$ per $x > 0$, dunque F è strettamente crescente e non ha ulteriori zeri. Perciò l'unica intersezione con gli assi è (0; 0).
- Studiamo il segno di g. Per $-1 < x < 0$ si ha:

  $$2\left(x + \frac{1}{1+x}\right) - 2 > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1+x} > 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

  Per $x > 0$ abbiamo visto che $F(x) = g(x)$ è strettamente crescente, quindi $g(x) > 0$. Di conseguenza, g è non negativa su tutto il suo dominio.
- Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

  $$\lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+} \left[2\left(x + \frac{1}{1+x}\right) - 2\right] = +\infty$$

  $$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} [2\ln(x+1) + x^2 - 2x] = +\infty$$

  dove nel secondo limite abbiamo usato la gerarchia degli infiniti.

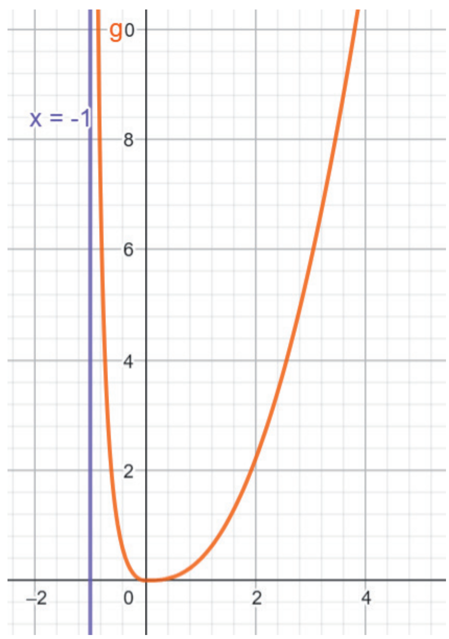
- Dal calcolo dei limiti ricaviamo che g ha l'asintoto verticale (destro) $x = -1$. Possiamo cercare un asintoto obliquo destro calcolando:

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x+1) + x^2 - 2x}{x} = +\infty$$

  Poiché il limite non è finito, la funzione non ha alcun asintoto.
- Dallo studio del segno di g ricaviamo che l'unico punto di minimo assoluto è $(0; 0)$. Sappiamo inoltre che per $x > 0$ la funzione è strettamente crescente, il che esclude la presenza di ulteriori punti di estremo relativo. Per $-1 < x < 0$, invece, si ha:

  $$g'(x) = f'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^2} < 0$$

  Di conseguenza, g è strettamente decrescente e non ha punti di estremo relativo.
  Mettendo insieme le informazioni ottenute dallo studio della funzione g, ne tracciamo il grafico:



d. Il segmento ha estremi $g(\alpha) = f(\alpha)$ e $h(\alpha)$. La sua lunghezza è:

$$l(\alpha) = |f(\alpha) - h(\alpha)| = \left|2\left(\alpha + \frac{1}{1+\alpha}\right) - 2 - (\alpha^2 - 2\alpha)\right| = \left|\frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha}{\alpha + 1}\right|$$

Dato che $\lim_{\alpha \to -1^+} (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha) = 2$ e che $\lim_{\alpha \to -1^+} \frac{1}{\alpha + 1} = +\infty$, la funzione $l(\alpha)$ è illimitata superiormente. Concludiamo che non esiste alcun valore di α per cui il segmento ha lunghezza massima.

e. Per $x \geqslant 0$, $g(x) = 2\ln(x+1) + x^2 - 2x > x^2 - 2x = h(x)$, perciò l'area richiesta è:

$$\int_0^k g(x) - h(x)dx = \int_0^k 2\ln(x+1)dx = 2\int_1^{k+1} \ln t dt = 2\,[t\ln t - t]_1^{k+1} = 2(k+1)\ln(k+1) - 2k$$

dove le primitive del logaritmo si possono calcolare per parti.

f. Osserviamo che $(k+1)\ln(k+1) > \ln k(k+1)$, da cui $2(k+1)\ln(k+1) - 2k > 2\ln(k+1)$. Il limite di quest'ultima funzione per $k \to +\infty$ è $+\infty$ e quindi, per il teorema dell'unico carabiniere, si ha anche:

$$\lim_{k \to +\infty} [2(k+1)\ln(k+1) - 2k] = +\infty$$