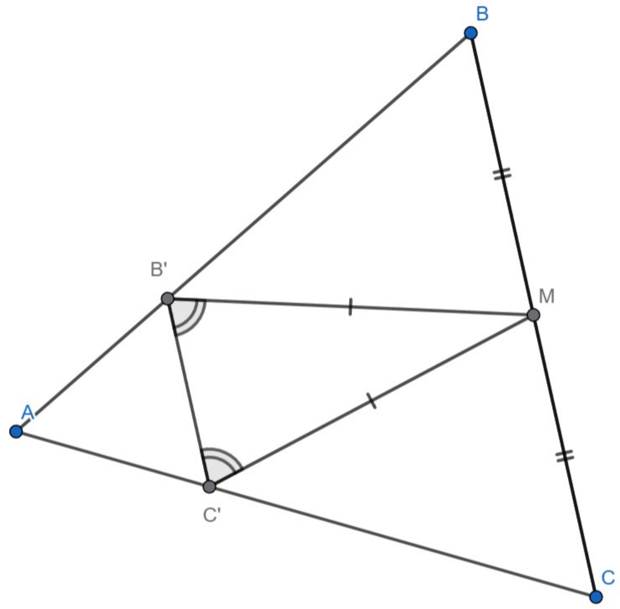
Quesiti

1. Dato un triangolo ABC, sia M il punto medio del lato BC e siano B' e C' due punti, rispettivamente, sul lato AB e sul lato AC, in modo tale che $AB' = \frac{1}{3}AB$ e $AC' = \frac{1}{3}AC$. Dimostrare che, se i segmenti MB' e MC' sono tra loro congruenti, allora lo sono anche i lati AB e AC.
2. Si considerino la superficie sferica di equazione $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$ e il piano π di equazione $x - 2y - 2z + d = 0$. Discutere, al variare del parametro reale d, se il piano π è secante, tangente o esterno alla superficie sferica. Determinare il valore del parametro d in modo che π divida la sfera in due parti uguali.
3. L'opera futurista di Boccioni "*Forme uniche della continuità nello spazio*" del 1913 descrive un uomo che avanza velocemente nello spazio. Una parte del profilo di una gamba, in un opportuno sistema di riferimento, può essere approssimato dalla funzione
$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x & -1 \le x \le 0 \\ 1 + \tan\left(x + \dfrac{3}{4}\pi\right) & 0 < x \le 2 \end{cases}$$
Tracciare il grafico di f, dopo averne analizzato la continuità e la derivabilità nell'intervallo $[-1, 2]$.
4. Assegnata una funzione g, derivabile in $\mathbb{R}$ e tale che $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, determinare l'equazione della retta normale alla curva $y = g(x)\,\mathrm{sen}^2\, x$ nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$.
5. Determinare il valore del parametro reale k in modo che le due curve $y = e^x$, $y = 6 - ke^{-x}$ risultino tangenti tra loro, individuando le coordinate del punto di contatto.
6. Scrivere una funzione polinomiale f in modo tale che la retta di equazione $y = 2x + 3$ sia tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 e si abbia $\int_0^3 f(x)\,dx = 9$.
7. Cicerone, nel dialogo con il fratello Quinto, parla del colpo di Venere, che consiste nel lanciare 4 dadi a 4 facce ottenendo 4 risultati diversi. Supponendo che le facce di ciascun dado siano equiprobabili, determinare:
   - la probabilità di ottenere il colpo di Venere nel lancio di 4 dadi;
   - la probabilità di ottenere 4 numeri tutti uguali.
8. Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "STUDIARE"? In quanti di tali anagrammi si può leggere consecutivamente la parola "ARTE", come ad esempio in "SUARTEDI"? Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "VACANZA"?

Svolgimenti

1. Per il teorema di Talete, $B'C'//BC$. Poiché $B'M \cong C'M$ per ipotesi, si ha $M\widehat{B'}C' \cong M\widehat{C'}B'$ in quanto angoli alla base di un triangolo isoscele. Quindi anche $B'\widehat{M}B \cong C'\widehat{M}C$. Pertanto, il primo criterio di congruenza ci permette di concludere che i triangoli $B'BM$ e $C'CM$ sono congruenti, da cui anche i segmenti AB e AC sono congruenti.



2. Il centro della sfera è il punto $C(1;2;0)$; la distanza tra C e il piano è:
$$d(C,\pi)=\frac{|1-4+d|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|d-3|}{3}$$
Il piano è esterno se $d(C,\pi)>1$, è tangente se $d(C,\pi)=1$, è secante se $d(C,\pi)<1$, divide la sfera in due parti congruenti se $d(C,\pi)=0$.
$$\frac{|d-3|}{3}>1 \Leftrightarrow d>6 \vee d<0$$
$$\frac{|d-3|}{3}=1 \Leftrightarrow d=6 \vee d=0$$
$$\frac{|d-3|}{3}<1 \Leftrightarrow 0<d<6$$
$$\frac{|d-3|}{3}=0 \Leftrightarrow d=3$$
3. Studiamo la continuità in 0, dato che negli altri punti del dominio f è continua.
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-4x^2-8x)=0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\tan\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)\right)=0$$
Dato che i due limiti sono uguali e sono uguali a $f(0)$, la funzione è continua anche in 0.
Per quanto riguarda la derivabilità, per $x\neq 0$ f è derivabile. In $x=0$ si ha, grazie a un corollario del teorema di De l'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(-8x-8)=-8$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)}=2$$
Dato che i due limiti sono diversi ed entrambi finiti, f presenta un punto angoloso in $x=0$. Il grafico della funzione è rappresentato in figura.
4. La retta normale alla curva di equazione $y=f(x)$ nel suo punto di ascissa $x=x_0$ ha equazione $y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$. Poniamo $f(x)=g(x)\operatorname{sen}^2 x$. Si ha:
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}=1$
- $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}+g\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=1+4\cdot\frac{1}{2}=3$

Quindi l'equazione della retta normale cercata è $y = 1 - \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

5. Imponiamo che le due curve $y = e^x$ ed $y = 6 - ke^{-x}$ passino per uno stesso punto e che le loro derivate in quel punto siano uguali.

$$\begin{cases} e^x = 6 - ke^{-x} \\ e^x = ke^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2e^x = 6 \\ e^x = ke^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \ln 3 \\ 3 = \dfrac{k}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \ln 3 \\ k = 9 \end{cases}$$

6. Il quesito propone tre vincoli: il passaggio per il punto $(0; 3)$, che si traduce in $f(0) = 3$; la condizione sulla derivata $f'(0) = 2$, e il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)\,dx = 9$. Questo ci suggerisce che una funzione polinomiale di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ li possa soddisfare tutti. La prima condizione si traduce in $c = 3$, la seconda in $b = 2$. Per la terza si ha:

$$\left[a\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_0^3 = 9a + 9 + 9 = 9 \Rightarrow a = -1$$

Quindi $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

7. Immaginiamo che i dadi vengano lanciati uno dopo l'altro: questo non fa perdere di generalità alla soluzione. In tal caso, il secondo dado deve avere un risultato diverso dal primo, evento che si verifica con probabilità $\frac{3}{4}$. Analogamente, il terzo dado deve avere un risultato diverso dai primi due, evento che si verifica con probabilità $\frac{1}{2}$. Il quarto dado mostra un valore diverso dai precedenti con probabilità $\frac{1}{4}$. La probabilità che si verifichi il colpo di Venere è quindi: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$.
Ragionando in modo analogo, ricaviamo che la probabilità di ottenere quattro numeri uguali è $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$.

8. Le lettere della parola STUDIARE sono otto e sono tutte distinte, quindi i loro anagrammi sono $8!$. Se vogliamo che le lettere che formano la parola "ARTE" si trovino esattamente in quell'ordine, possiamo trattare le lettere di "ARTE" come una singola "lettera". Gli anagrammi in cui si può leggere consecutivamente la parola "ARTE" sono quindi $5!$. La parola VACANZA invece ha sette lettere di cui tre uguali (le tre "A"). I suoi anagrammi sono quindi $\frac{7!}{3!}$.