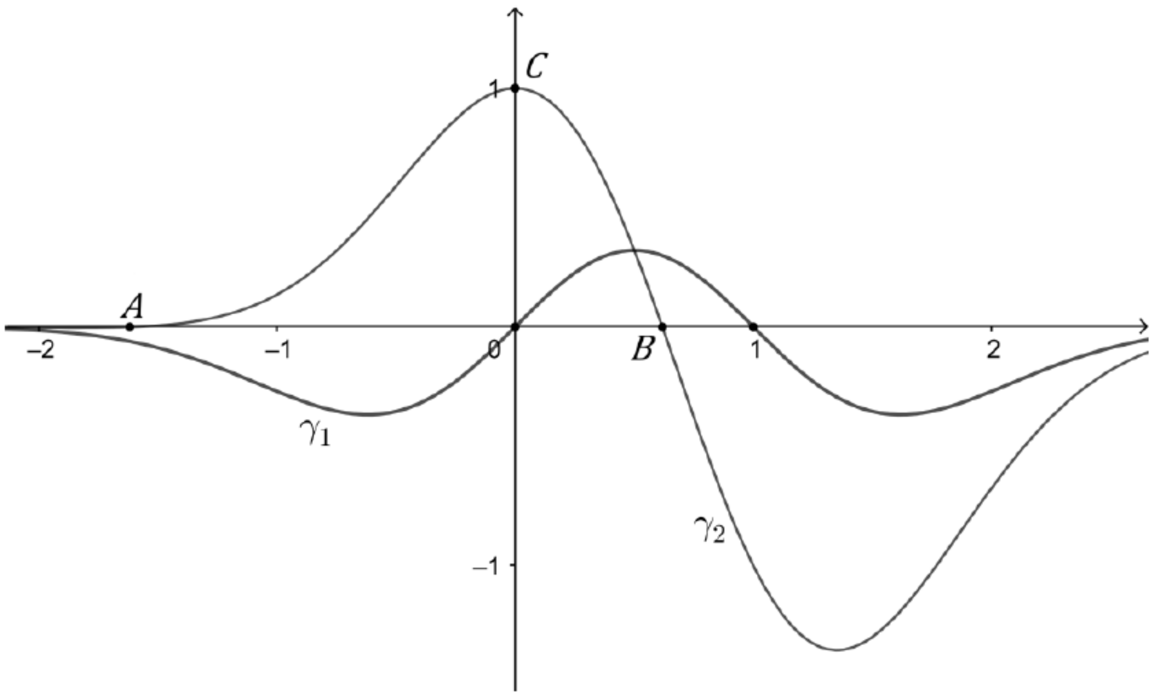
Problema 2



I grafici γ_1 e γ_2 rappresentano, rispettivamente, le funzioni f e g, definite su $\mathbb{R}$, le cui espressioni analitiche sono
$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}$, $g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)}$

con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di secondo grado.

a) Determinare i polinomi $p(x)$ e $q(x)$ utilizzando le informazioni deducibili dai grafici in figura, considerando che $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è ascissa di un punto stazionario di f e che $-\varphi$, ascissa del punto A, è uno zero di g.
b) Posto che $p(x) = x - x^2$, studiare la funzione f specificando l'equazione dell'asintoto, le ascisse dei punti stazionari e di flesso. Verificare che la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per γ_1. Determinare l'insieme immagine di f e indicare, al variare del parametro reale k, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
c) Stabilito altresì che $q(x) = 1 - x - x^2$, verificare che $\frac{1}{\varphi}$ è l'ulteriore zero di g e che il triangolo ABC è rettangolo. Dimostrare che γ_1 e γ_2 hanno un unico punto di intersezione, del quale si chiedono le coordinate. Considerati su γ_1 e γ_2, rispettivamente, i punti P_1 e P_2 aventi uguale ascissa $x \geq \frac{1}{2}$, calcolare la lunghezza massima che può assumere il segmento P_1P_2.
d) Calcolare l'area della regione limitata R compresa tra γ_1, γ_2 e l'asse delle ordinate. Individuare, successivamente, il valore di $t \geq \frac{1}{2}$ affinché la retta $x = t$ delimiti con i due grafici una regione R' equivalente a R.

Svolgimento

a) Osserviamo che f, il cui grafico è γ_1, ha zeri per $x = 0$ e $x = 1$. Poiché la funzione esponenziale non si annulla mai, la funzione $f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}$ si annulla negli zeri di $p(x)$, che è un polinomio di 2° grado. Allora $p(x) = ax(x-1) = ax^2 - ax$ per un certo valore reale di a. Perciò:
$f(x) = ax(x-1) \cdot e^{ax(x-1)} = (ax^2 - ax)e^{ax(x-1)}$
Possiamo inoltre osservare che, poiché a $\pm\infty$ la funzione f tende a 0, la costante a deve essere

negativa.

Sappiamo inoltre che $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è ascissa del punto stazionario di f. Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = p'(x) \cdot e^{p(x)} + p(x)e^{p(x)}p'(x) = e^{p(x)}p'(x)[1 + p(x)]$$

Questa funzione si annulla quando:

$p'(x) = 0$ oppure $p(x) = -1$

Abbiamo che $p'(x) = 2ax - a = 0$ per $x = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$: questa è l'ascissa di un primo punto stazionario.

Allora deve valere $p(x) = ax^2 - ax = -1$ per $x = \varphi$. Sostituiamo φ e otteniamo:

$$a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - a\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -1$$

$$a\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - a\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -1$$

$$a\left(\frac{3+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1 \Rightarrow a = -1$$

Sappiamo così che $p(x) = x(1-x)$ e quindi $f(x) = x(1-x) \cdot e^{x(1-x)}$.

Dall'espressione di f sappiamo che $g(x) = q(x) \cdot e^{x(1-x)}$.

Poiché $q(x)$ è un polinomio di 2° grado, deve essere $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Imponiamo $g(0) = 1$, cioè $q(0) \cdot e^0 = 1$. Allora deve essere $q(0) = 1$, cioè $\gamma = 1$:

$$q(x) = \alpha x^2 + \beta x + 1$$

Ora osserviamo che in $x = 0$ la funzione g ha un punto stazionario. Calcoliamo $g'(0)$ e lo poniamo uguale a 0:

$$g'(x) = q'(x) \cdot e^{x(1-x)} + q(x) \cdot e^{x(1-x)} \cdot (1-2x) = e^{x(1-x)}[q'(x) + q(x)(1-2x)]$$

$$g'(0) = q'(0) + q(0)(1 - 2 \cdot 0) = q'(0) + q(0) = q'(0) + 1 = 0$$

Poiché $q'(0) = 2\alpha \cdot 0 + \beta$, otteniamo:

$$\beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

cioè $q(x) = \alpha x^2 - x + 1$.

Infine imponiamo che la funzione g abbia uno zero in $-\varphi$:

$$g(-\varphi) = (\alpha\varphi^2 + \varphi + 1) \cdot e^{-\varphi(\varphi-1)} = 0 \Rightarrow \alpha\varphi^2 + \varphi + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\frac{6+2\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \alpha\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

Concludiamo perciò che:

$q(x) = -x^2 - x + 1$ e $g(x) = (-x^2 - x + 1)e^{x(1-x)}$

b) Studiamo la funzione $f(x) = (x - x^2) \cdot e^{x-x^2}$.

- **Dominio**

  La funzione f è definita su $\mathbb{R}$.

- **Simmetrie**

  La funzione non è né pari né dispari.

- **Continuità**

  La funzione è continua sul suo dominio.

- **Intersezione con gli assi**

Le intersezioni con l'asse x sono l'origine e $(1; 0)$, come abbiamo già osservato dal grafico. L'intersezione con l'asse y è ancora l'origine.

- **Segno**

Dal grafico osserviamo che la funzione è negativa per $x < 0 \vee x > 1$ e positiva per $0 < x < 1$.

- **Calcolo dei limiti agli estremi del dominio**

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Lo possiamo vedere nel grafico, ma anche verificare grazie alla gerarchia degli infiniti: "vince" il fattore e^{-x^2}.

- **Ricerca di eventuali asintoti**

I limiti trovati al punto precedente ci dicono che la funzione f ha un asintoto orizzontale, che è $x = 0$.
Non ci possono quindi essere asintoti obliqui.
Non ci sono nemmeno asintoti verticali.

- **Studio della monotonia e determinazione di massimi e minimi**

Abbiamo già visto che la funzione

$$f'(x) = p'(x) \cdot e^{p(x)} + p(x)e^{p(x)}p'(x) = e^{p(x)}p'(x)[1 + p(x)]$$

si annulla per $p'(x) = 0$ oppure per $p(x) = -1$. Abbiamo così già trovato che ci sono due punti stazionari per $x = \frac{1}{2}$ e per $x = \varphi$. Troviamo il terzo punto stazionario dalla condizione $p(x) = -1$, di cui abbiamo determinato solo la soluzione $x = \varphi$:

$$x - x^2 = -1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La funzione allora ha tre punti stazionari per $x = \frac{1}{2}, x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (che è φ) e $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
La monotonia della funzione si può ricavare dal grafico:
- la funzione è decrescente per $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e per $\frac{1}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- la funzione è crescente per $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}$ e per $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Si ha un minimo per $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e per $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, mentre si ha un massimo per $x = \frac{1}{2}$.

- **Ricerca dei flessi**

Riscriviamo la derivata di f e calcoliamo la derivata seconda:

$$f'(x) = e^{p(x)}p'(x)[1 + p(x)] = e^{x-x^2}(1 - 2x)(1 + x - x^2)$$

$$\begin{aligned} f''(x) = {} & e^{x-x^2}(1 - 2x)(1 - 2x) + e^{x-x^2}(-2)(1 + x - x^2) \\ & + e^{x-x^2}(1 - 2x)(1 - 2x)(1 + x - x^2) = \\ = {} & e^{x-x^2}[-2(1 + x - x^2) + (1 - 2x)^2(1 + 1 + x - x^2)] = \\ = {} & e^{x-x^2}[-2 - 2x + 2x^2 + (1 - 2x)^2(2 + x - x^2)] \end{aligned}$$

Dal grafico possiamo immaginare che ci siano due punti di flesso per $x = 0$ e $x = 1$, perciò la derivata seconda si annulla per questi valori. Proviamo a raccogliere in modo da evidenziare $x(x - 1)$, cioè $x^2 - x$ nella scrittura precedente (altrimenti, si possono svolgere i calcoli e usare Ruffini):

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= e^{x-x^2}[-2-2(x-x^2)+(1-2x)^2(x-x^2)+2(1-2x)^2] = \\
&= e^{x-x^2}[(x-x^2)(-2+(1-2x)^2)+2(1-2x)^2\ -2] = \\
&= e^{x-x^2}[(x-x^2)(-2+(1-2x)^2)+2+8x^2-8x-2] = \\
&= e^{x-x^2}[(x-x^2)(-2+1+4x^2-4x)+8(x^2-x)] = \\
&= e^{x-x^2}[(x-x^2)(-1+4x^2-4x-8)] = \\
&= e^{x-x^2}[(x-x^2)(-9+4x^2-4x)]
\end{aligned}
$$

Le ascisse dei punti di flesso sono allora $x_1 = 0, x_2 = 1$ e i valori tali che $4x^2 - 4x - 9 = 0$, cioè:

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$$

Verifichiamo ora che $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per γ_1. Ciò significa che $f\left(\frac{1}{2}+x\right) = f\left(\frac{1}{2}-x\right)$ per ogni valore di x. Verifichiamolo sostituendo in $f(x) = x(1-x) \cdot e^{x(1-x)}$:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}+x\right) &= \left(\frac{1}{2}+x\right)\left(1-\frac{1}{2}-x\right) \cdot e^{\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(1-\frac{1}{2}-x\right)} \\
&= \left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right) \cdot e^{\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)} = \\
&= \left(\frac{1}{4}-x^2\right) \cdot e^{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}-x\right) &= \left(\frac{1}{2}-x\right)\left(1-\frac{1}{2}+x\right) \cdot e^{\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(1-\frac{1}{2}+x\right)} \\
&= \left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right) \cdot e^{\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)} = \\
&= \left(\frac{1}{4}-x^2\right) \cdot e^{\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}
\end{aligned}
$$

Le due espressioni sono uguali, quindi la funzione è simmetrica rispetto a $x = \frac{1}{2}$.

Determiniamo ora l'insieme immagine di f. Per farlo, calcoliamo l'ordinata dei punti stazionari (per i minimi ne basta uno, perché abbiamo appena verificato che la funzione è simmetrica, quindi i due minimi avranno la stessa ordinata):

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) \cdot e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)}$$

Calcoliamo prima:

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+5-2\sqrt{5}}{4} = \frac{2-2\sqrt{5}-6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

Allora $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -e^{-1}$ è il valore minimo che assume la funzione.

Invece il valore massimo è $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}}$.

L'insieme immagine di f è perciò $\left[-e^{-1}, \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}}\right]$.

Le soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ sono l'ascissa dei punti di intersezione della curva γ_1 e della retta $y = k$. Osservando il grafico e tenendo conto dell'immagine di f, dei suoi massimi e dei suoi minimi, possiamo stabilire che:

- l'equazione ha 0 soluzioni per $k < -e^{-1}$ e per $k > \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}}$;

- l'equazione ha 1 soluzione (doppia) per $k = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}$;
- l'equazione ha 2 soluzioni per $0 \leq k < \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}$;
- l'equazione ha 4 soluzioni per $-e^{-1} < k < 0$;
- l'equazione ha 2 soluzioni (entrambe doppie) per $k = -e^{-1}$.

c) Calcoliamo gli zeri di g:

$g(x) = (-x^2 - x + 1)e^{x(1-x)} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Ritroviamo lo zero $x = -\phi$, e anche $x = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Dato che $-\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1-5}{4} = 1, -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi}$.

Verifichiamo che ABC è rettangolo. Innanzitutto scriviamo le coordinate dei tre vertici:

$$A(-\varphi, 0), B\left(\frac{1}{\varphi}, 0\right), C(0; 1)$$

Osserviamo che la retta AC ha coefficiente angolare $m_{AC} = \frac{1}{\varphi}$, mentre la retta BC ha coefficiente angolare $-\frac{1}{1/\varphi} = -\varphi$. Poiché $m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$, le due rette sono perpendicolari e il triangolo è rettangolo.

Troviamo l'intersezione delle due curve, imponendo:

$$(x - x^2) \cdot e^{x-x^2} = (-x^2 - x + 1)e^{x(1-x)} \Rightarrow x - x^2 = -x^2 - x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Sappiamo che $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}$, perciò le due curve si intersecano nel punto di massimo di f, che è $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}\right)$.

Osserviamo che, per $x \geq \frac{1}{2}$, $f(x) \geq g(x)$ e l'uguaglianza si ha solo in $x = \frac{1}{2}$. Infatti abbiamo appena visto che le due curve non hanno altri punti di intersezione oltre a $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}\right)$, quindi γ_1 rimane sempre sopra γ_2 su $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, dato che entrambe le funzioni sono continue.

La lunghezza $l(x)$ di P_1P_2 in funzione dell'ascissa x è la differenza delle ordinate dei due punti:

$$l(x) = (x - x^2) \cdot e^{x-x^2} - (-x^2 - x + 1)e^{x-x^2} = e^{x-x^2}(2x - 1)$$

Calcoliamo la derivata di questa funzione:

$$l'(x) = 2e^{x-x^2} + e^{x-x^2}(2x - 1)(1 - 2x) = e^{x-x^2}(2 - (2x - 1)^2)$$

Questa quantità è nulla per $(2x - 1)^2 = 2$, cioè per $2x - 1 = \pm\sqrt{2}$, cioè $x = \frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$. Poiché a noi interessano solo i valori di $x \geq \frac{1}{2}$, l'unico possibile massimo si ha per $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Verifichiamo che sia effettivamente un massimo osservando il segno della derivata:

$l' > 0$ per $2 - (2x - 1)^2 > 0$, cioè per:

$4x^2 - 4x - 1 < 0$ cioè per valori compresi tra $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Perciò la lunghezza cresce tra $\frac{1}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, poi decresce.

d) La regione R è compresa tra $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$ e si trova con l'integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(-x^2 - x + 1)e^{x-x^2} - (x - x^2)e^{x-x^2}\right] dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x-x^2}(-2x + 1)\, dx = [e^{x-x^2}]_0^{1/2} = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} - 1 = e^{\frac{1}{4}} - 1$$

Ora cerchiamo t tale che l'area di R' sia uguale a quella di R. Vogliamo che valga:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{t} [f(x) - g(x)]\, dx = e^{\frac{1}{4}} - 1$$

L'integrale è:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{t} e^{x-x^2}(2x-1)\,dx = [-e^{x-x^2}]_{1/2}^{t} = e^{\frac{1}{4}} - e^{t-t^2}$$

Affinché valga l'uguaglianza deve essere:

$$e^{t-t^2} = 1 \Rightarrow t - t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = 1$$

Poiché ci interessano i valori di t maggiori di $\frac{1}{2}$, la retta cercata è $t = 1$.