Problema 1

Dati $r > 0$ e $k < 0$, si considerino la circonferenza C_r di centro l'origine e raggio r, e la funzione $f_k(x) = k|x|$.

a) Verificare che f_k è continua ma non derivabile in $x = 0$ qualunque sia il valore di k. Individuare i due valori di r in corrispondenza dei quali C_r delimita con il grafico di f_k, per opportuni valori di k, un settore circolare nel semipiano $y \leq 0$ di area π e contorno di lunghezza $4 + \pi$. Stabilito che $r = 2$ è il maggiore di tali valori, in uno stesso riferimento cartesiano Oxy tracciare la circonferenza C_2 e il grafico della funzione f_{-1}.

b) Studiare la funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, specificandone dominio, simmetrie, punti di non derivabilità, intervalli di monotonia ed insieme immagine. Verificare che il grafico di g coincide con la parte di C_2 che si trova nel semipiano $y \geq 0$. Spiegare perché g non è invertibile nel suo dominio ed esplicitare l'intervallo $[a; b]$ di ampiezza massima, con $b > 0$, nel quale g ammette una funzione inversa h. Qual è l'espressione analitica di h?

c) Sia A un punto del grafico di g situato nel I quadrante, e siano M e R le sue proiezioni ortogonali sugli assi del riferimento. Determinare le coordinate di A in modo che il quadrilatero $AMOR$ abbia area massima. Dopo aver verificato che tale quadrilatero è un quadrato, dimostrare che è anche quello di perimetro massimo.

d) Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{4 - t^2}\, dt$, con $x \in [-2, 2]$. Determinare $F(2)$ e tracciare un grafico di F, dopo averne studiato monotonia e concavità. Scrivere, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di flesso.

Svolgimento

a) Osserviamo che $x = 0$ è interno al dominio di ciascuna delle funzioni f_k, che sono definite su $\mathbb{R}$. Per $x \neq 0$ f_k è continua. Verifichiamo la continuità in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} k|x| = 0 = f(0)$$

Per quanto riguarda la derivabilità, per $x \neq 0$ si ha:

$$f_k'(x) = k \cdot \operatorname{sign}(x)$$

Grazie a un corollario del teorema di De l'Hopital, concludiamo che:

$$\lim_{x \to 0^+} f_k{}'(x) = k \text{ e } \lim_{x \to 0^-} f_k{}'(x) = -k$$

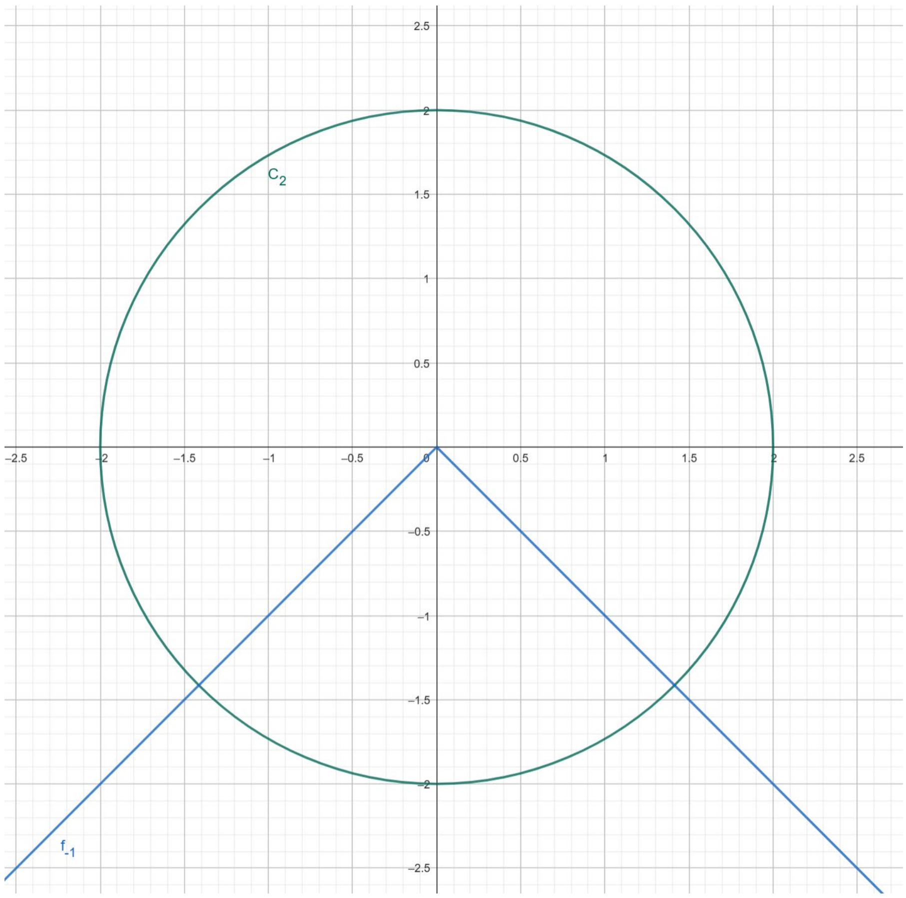
Dato che $k < 0$, le funzioni f_k presentano un punto angoloso in $x = 0$.

Per determinare i valori di r richiesti, indichiamo con α l'angolo individuato dal settore circolare delimitato da C_r e dal grafico di f_k. Il contorno del settore circolare ha lunghezza $2r + r\alpha$ e area $r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r^2}{2}\alpha$. Mettendo a sistema i vincoli otteniamo i valori ammissibili di r e α:

$$\begin{cases} r(2 + \alpha) = 4 + \pi \\ \dfrac{r^2}{2}\alpha = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2r + \dfrac{2\pi}{r} = 4 + \pi \\ \alpha = \dfrac{2\pi}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2r^2 - r(4 + \pi) + 2\pi = 0 \\ \alpha = \dfrac{2\pi}{r^2} \end{cases}$$

Risolvendo la prima equazione si ottengono le soluzioni $r = 2$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (che corrisponde a $k = -1$) e $r = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{8}{\pi}$. Dato che $\frac{\pi}{2} < 2$, il maggiore dei valori di r per cui il settore circolare ha contorno e area assegnati è $r = 2$.

La circonferenza C_2 e il grafico della funzione f_{-1} sono mostrati in figura.



b) La funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ è definita per quei valori di x che verificano:

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow x \in [-2, 2]$$

Osserviamo che g è pari e non negativa. Inoltre, g è continua in $[-2, 2]$ ed è derivabile in $(-2, 2)$. Dato che il grafico di g è la semicirconferenza di raggio 2 centrata nell'origine e contenuta nel semipiano $y \geq 0$, sappiamo che in $x = \pm 2$ ha un punto di non derivabilità a tangente verticale. Inoltre, l'immagine di g è $[0, 2]$.

La funzione g non è invertibile sul suo dominio in quanto non è iniettiva, dato che è pari. L'intervallo $[a, b]$ di ampiezza massima con $b > 0$ nel quale g è invertibile è l'intervallo $[0, 2]$; dato che il grafico di g è simmetrico rispetto alla retta $y = x$, la funzione inversa risulta essere $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

c) Chiamiamo β l'angolo formato da OA con il semiasse positivo delle ascisse. Dato che A appartiene al primo quadrante, $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Allora:

- $A = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$
- $M = (\cos\beta, 0)$
- $R = (0, \operatorname{sen}\beta)$

Il quadrilatero $AMOR$ è un rettangolo, quindi la sua area è $a(\beta) = \cos\beta \operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen} 2\beta}{2}$. Per $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, questa funzione assume massimo in $\beta = \frac{\pi}{4}$.

Il perimetro del quadrilatero $AMOR$ è $p(\beta) = 2(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta) = 2\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)$, quindi anch'esso ha massimo in $\beta = \frac{\pi}{4}$. Ne segue che i lati OM e OR hanno la stessa lunghezza, quindi il quadrilatero $AMOR$ è effettivamente un quadrato.

In maniera alternativa, il punto A ha coordinate $\left(x; \sqrt{4 - x^2}\right)$ e l'area del rettangolo è $a(x) = x\sqrt{4 - x^2}$. Si ha $a'(x) = -\frac{2(x^2 - 2)}{\sqrt{4 - x^2}}$, che si annulla per $x = \sqrt{2}$.

d) Grazie all'interpretazione di integrale come area pesata con il segno della funzione e ricordando che g è non negativa, $F(2)$ è l'area del semicerchio di raggio 2 centrato nell'origine e contenuto nel semipiano $y \geq 0$, quindi $F(2) = 2\pi$. La non negatività di g comporta che F sia crescente; il fatto che g risulta crescente su $[-2, 0]$ e decrescente su $[0, 2]$ implica che F è convessa su $[-2, 0]$ e concava su $[2, 0]$.

L'equazione della retta tangente a F nel suo punto di flesso $x = 0$ è $y = F(0) + F'(0)x$. Usando ancora l'interpretazione geometrica di F, si ha $F(0) = \pi$; inoltre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha: $F'(0) = g(0) = 2$. Quindi la retta tangente a F nel suo punto di flesso $x = 0$ è $y = \pi + 2x$.

Il grafico di F è rappresentato di seguito.