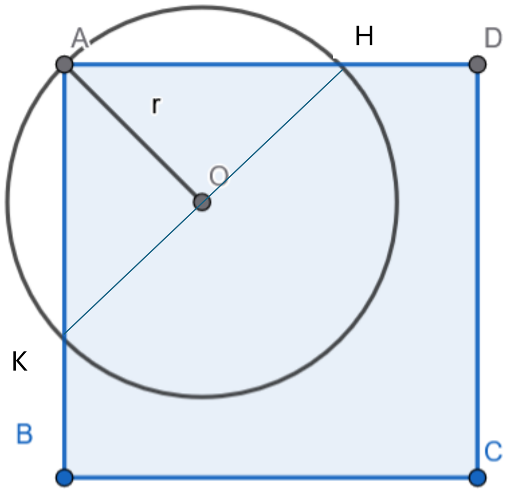
QUESITI

1. Cecilia mostra a Nicolò una variante del gioco "*Cover the spot*": disegna su un foglio un quadrato $ABCD$ di lato $\sqrt{2}$ dm e poi ritaglia tre cartoncini circolari di raggio $\frac{2}{3}$ dm. Lo scopo del gioco è quello di coprire, con i tre cerchi, la maggior parte possibile del quadrato. Cecilia posiziona inizialmente in cartoncino in modo che il centro sia sulla diagonale AC del quadrato e il bordo passi per A. Prima di posizionare il secondo cartoncino, afferma che ha già coperto più della metà del quadrato, mentre Nicolò dice che non è così.

Chi ha ragione? Motivare la risposta.

Svolgimento

Ecco la situazione dopo la prima mossa di Cecilia. Ricordiamo che $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.



Per ragioni di simmetria, HK è un diametro del cerchio. Calcoliamo le aree:

- area del quadrato coperta dal cerchio = $A_{AHK} + A_{\text{semicerchio}} =$
  $= \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \pi = \frac{4}{9} + \frac{2}{9}\pi \approx 1{,}14$ dm²
- $A_{\text{quadrato}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

Quindi ha ragione Cecilia.

2. Si considerino nello spazio tridimensionale i punti $A(2; -4; 3)$, $B(3; 5; -1)$, $C(-6; 1; 0)$, $D(-1; 4; 8)$.

a) Verificare che A, B, C, D sono i vertici di un tetraedro regolare.
b) Determinare l'equazione del piano tangente in A alla superficie sferica passante per i punti A, B, C, D.

Svolgimento

a) Calcoliamo le distanze al quadrato tra ogni coppia di punti:

$$d^2(A,B) = (3-2)^2 + (5+4)^2 + (-1-3)^2 = 1 + 81 + 16 = 98$$
$$d^2(A,C) = (-6-2)^2 + (1+4)^2 + (0-3)^2 = 64 + 25 + 9 = 98$$

$$d^2(A,D) = (-1-2)^2 + (4+4)^2 + (8-3)^2 = 9 + 64 + 25 = 98$$

$$d^2(B,C) = (-6-3)^2 + (1-5)^2 + (0+1)^2 = 81 + 16 + 1 = 98$$

$$d^2(B,D) = (-1-2)^2 + (4+4)^2 + (8-3)^2 = 9 + 64 + 25 = 98$$

Poiché le distanze tra tutti i vertici sono uguali, le facce del solido sono tutte triangoli equilateri e il solido individuato è un tetraedro regolare.

b) La sfera che passa per i punti A, B, C, D ha per centro il baricentro del tetraedro, che si trova mediante la media delle coordinate:

$$O\left(\frac{2+3-6-1}{4}; \frac{-4+5+1+4}{4}; \frac{3-1+0+8}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

Il piano tangente alla sfera di centro O e passante per A è perpendicolare alla raggio della sfera passante per A. Individuiamo il vettore $\overrightarrow{OA}$:

$$\overrightarrow{OA} = \left(-\frac{1}{2} - 2; \frac{3}{2} + 4; \frac{5}{2} - 3\right) = \left(-\frac{5}{2}; \frac{11}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Il piano perpendicolare a questo vettore passante per A è:

$$-\frac{5}{2}(x-2) + \frac{11}{2}(y+4) - \frac{1}{2}(z-3) = 0$$
$$-5(x-2) + 11(y+4) - (z-3) = 0$$
$$-5x + 11y - z + 10 + 44 + 3 = 0$$
$$-5x + 11y - z + 57 = 0$$

3. Nel 1976, 50 anni fa, due scosse di terremoto, a maggio e a settembre, di magnitudo $M_1 = 6{,}5$ e $M_2 = 6{,}0$ della scala Richter, colpirono un vasto territorio a nord di Udine. La magnitudo M di un terremoto, secondo la scala Richter, è data da $M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)$, dove A rappresenta il massimo delle ampiezze registrate da un sismografo e A_0 è un'ampiezza di riferimento.

Si determini il rapporto $\frac{A_1}{A_2}$ tra le ampiezze prodotte dai due eventi sismici friulani.

La legge empirica di Gutenberg – Richter $\log_{10}\frac{E}{E_0} = 1{,}5M + 4{,}8$, dove E è l'energia liberata dal terremoto ed E_0 un'energia di riferimento, si determini la variazione percentuale dell'energia liberata tra il primo e il secondo terremoto.

Svolgimento

Conosciamo:

- $M_1 = 6{,}5 = \log_{10}\left(\frac{A_1}{A_0}\right)$
- $M_2 = 6{,}0 = \log_{10}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)$

Utilizzando le proprietà dei logaritmi possiamo ricavare:

$$M_1 - M_2 = 6{,}5 - 6{,}0 = 0{,}5 = \log_{10}\left(\frac{A_1}{A_0}\right) - \log_{10}\left(\frac{A_2}{A_0}\right) = \log_{10}\left(\frac{A_1}{A_0} \cdot \frac{A_0}{A_2}\right) = \log_{10}\frac{A_1}{A_2}.$$

Quindi $\frac{A_1}{A_2} = 10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Consideriamo la legge empirica Gutenberg – Richter nei due casi precedenti. Abbiamo:

$$\log_{10}\frac{E_1}{E_0} = 1{,}5M_1 + 4{,}8$$

$$\log_{10}\frac{E_2}{E_0} = 1{,}5M_2 + 4{,}8$$

$$\log_{10}\frac{E_1}{E_0} - \log_{10}\frac{E_2}{E_0} = 1{,}5M_1 + 4{,}8 - (1{,}5M_1 + 4{,}8) = 1{,}5(M_1 - M_2) = 1{,}5(6{,}5 - 6{,}0) = 0{,}75$$

Utilizzando le proprietà dei logaritmi possiamo ricavare:

$$\log_{10}\frac{E_1}{E_0} - \log_{10}\frac{E_2}{E_0} = \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_0}\cdot\frac{E_0}{E_2}\right) = \log_{10}\frac{E_1}{E_2}$$

Ne segue che $\log_{10}\frac{E_1}{E_2} = 0{,}75$, da cui otteniamo:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{0{,}75} \rightarrow E_1 = 10^{0{,}75}E_2$$

Calcoliamo la variazione percentuale:

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{10^{0{,}75} - 1}{10^{0{,}75}} \approx 0{,}82 = 82\%$$

4. Si consideri la funzione $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dx$ (con $x > 0$).

Dimostrare che la funzione $F(x)$ è una funzione costante e calcolarne il valore.

Svolgimento

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dx$$

quindi:

$$F(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Per calcolare il valore di F, possiamo calcolare per esempio $F(1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.

5. Determinare i valori dei parametri reali h, k con $h \neq 0$, in modo che la curva di equazione $y = h\ln\,(x^2 + k)^5$ abbia le rette $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ come asintoti verticali e le rette tangenti nei punti A e B di intersezione con l'asse delle ascisse si incontrino in $C(0; -4)$.

Svolgimento

La funzione $f(x) = h\ln\,(x^2 + k)^5$ è definita per $x^2 + k > 0$. Se $k > 0$, questa condizione è sempre soddisfatta e non ci sono tangenti verticali. Se $k \leq 0$, questa condizione vale per $x < -\sqrt{-k} \vee x > \sqrt{-k}$.

Poiché vogliamo che la curva abbia le rette $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ come asintoti verticali, sarà allora $k = -3$.

Otteniamo perciò $y = h\ln\,(x^2 - 3)^5$.

Calcoliamo i punti di intersezione con l'asse delle ascisse, ponendo:

$$h\ln\,(x^2 - 3)^5 = 0$$

Poiché $h \neq 0$, questa equazione è soddisfatta per $x^2 - 3 = 1$, cioè per $x = \pm 2$.
I punti di intersezione della curva con l'asse delle ascisse sono perciò $A(-2; 0)$ e $B(2; 0)$.
Osserviamo che la funzione è pari.
Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{h \cdot 5(x^2-3)^4 \cdot 2x}{(x^2-3)^5} = \frac{10hx}{x^2-3}$$

Per $x = 2$ vale $f'(2) = 20h$. La retta tangente alla curva nel punto $(2; 0)$ sarà allora:

$$y = 20h(x-2)$$

Per simmetria, la retta tangente in $(-2; 0)$ sarà $y = -20h(x+2)$.
[Puoi anche verificarlo con i conti, infatti $f'(-2) = -20$.]
Imponiamo il passaggio della prima retta per $C(0; -4)$, e per simmetria -siccome C appartiene all'asse y- anche l'altra tangente passerà per lo stesso punto:

$$-4 = 20h(0-2) \Rightarrow -4 = -40h \Rightarrow h = \frac{1}{10}$$

I valori dei parametri richiesti sono allora $h = \frac{1}{10}$ e $k = -3$.

6. Determinare l'espressione del polinomio $p(x)$ tale che il grafico della funzione $f(x) = \frac{p(x)}{2x+1}$ passi per il punto $P(1; 0)$ e abbia per asintoto obliquo la retta di equazione $y = 3x - 2$.

Svolgimento

Il polinomio p deve essere di secondo grado, altrimenti la funzione f non ammetterebbe asintoto obliquo. Si ha quindi $p(x) = ax^2 + bx + c$. Determiniamo i tre parametri.

Dall'informazione sul grafico della funzione ricaviamo $f(1) = 0$, che si traduce in:

$$a + b + c = 0$$

Invece l'equazione dell'asintoto obliquo ci dice che:

- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2+bx+c}{2x^2+x} = \frac{1}{2}a = 3 \Rightarrow a = 6$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{6x^2+bx+c}{2x+1} - 3x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{bx-3x+c}{2x+1} = \frac{b-3}{2} = -2 \Rightarrow b = -1.$

Quindi si ha $c = -5$ e $p(x) = 6x^2 - x - 5$.

7. Giuseppe, Lorenzo, Massimo e Vincenzo sono impegnati in una partita di scopone. All'inizio del gioco, a ciascun giocatore vengono casualmente distribuite 10 carte di un mazzo da 40 (diviso nei 4 semi: bastoni, coppe, denari e spade).

a) Determinare la probabilità che le prime 3 carte distribuite a Massimo siano tutte e 3 di coppe.

b) Determinare la probabilità che, tra le 10 carte distribuite a Lorenzo, siano presenti i 3 assi di bastoni, spade e denari.

Svolgimento

Osserviamo che, per simmetria, le probabilità richieste non dipendono dall'ordine in cui le carte vengono distribuite. Possiamo quindi assumere che vengano distribuite prima tutte le carte del giocatore interessato.

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{3}{247}$

b) Le possibili combinazioni di 10 carte distribuite a Lorenzo sono:

$$\binom{40}{10} = \frac{40!}{10!\ 30!}$$

Il numero di decine di carte che contengono i tre assi richiesti sono le possibili 7-ple di carte rimanenti, che sono:

$$\binom{37}{7} = \frac{37!}{7!\ 30!}$$

Allora la probabilità che Lorenzo riceva i tre assi richiesti è il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili:

$$\frac{37!}{7!\ 30!} : \frac{40!}{10!\ 30!} = \frac{37!}{7!\ 30!} \cdot \frac{10!\ \ 30!}{40!} = \frac{37!\,10!}{7!\,40!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{3}{247}$$

8. Ad un torneo internazionale di pallavolo partecipano 16 squadre, che devono essere suddivise in 4 gironi (indicati con le lettere A, B, C, D) di 4 squadre ciascuno.
Le 16 squadre partecipanti sono inizialmente ripartite in 3 fasce, in base all'attuale ranking: 4 squadre di 1^a fascia, 4 di 2^a fascia e 8 squadre di 3^a fascia. Le 4 squadre di 1^a fascia vengono inserite, rispettivamente, nei gironi A, B, C, D, secondo l'ordine del ranking (senza alcun sorteggio). Le altre squadre di ogni girone vengono invece sorteggiate, in modo che in ciascuno di essi vi siano una squadra di 2^a fascia e 2 squadre di 3^a fascia.
Quante sono, complessivamente, le possibili composizioni dei gironi A, B, C, D?

Svolgimento

Per il girone A ci sono 4 possibili squadre di 2^a fascia e 8 di 3^a fascia. Allora le possibili composizioni del girone A sono:

$$4 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 112$$

La divisione per 2 è dovuta al fatto che, se moltiplichiamo $8 \cdot 7$, contiamo due volte ogni coppia di squadre di 3^a fascia.
Fissato il girone A, le possibili squadre del girone B sono 3 di 2^a fascia e 6 di 3^a fascia. Allora le possibili composizioni del girone B, dato il girone A, sono:

$$3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 45$$

Fissati i gironi A e B, il girone C può pescare da 2 squadre di 2^a fascia e 4 di 3^a. Allora le composizioni possibili sono:

$$2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 12$$

A questo punto il girone D è fissato, perché si può prendere solo una squadra di 2^a fascia e 2 di 3^a fascia, che compongono l'unico girone possibile.

In conclusione, le possibili composizioni dei gironi del torneo sono:

$$112 \cdot 45 \cdot 12 \cdot 1 = 60480$$

Osservazione: nessuna combinazione viene contata due volte perché ogni girone è identificato dalla squadra di 1^a fascia.