

## PROBLEMA 2

Siano  $\varphi_a$  e  $\gamma$ , rispettivamente, i grafici rappresentativi delle funzioni:

$$f_a(x) = \frac{ax^2}{x-1}, \text{ con } a \neq 0 \quad g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

- Al variare del parametro  $a$ , studiare gli intervalli di monotonia della funzione  $f_a$ . Considerata la retta  $r$ , di equazione  $y = k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ), determinare i valori di  $a$  e  $k$  in modo che  $r$  risulti tangente ai grafici  $\varphi_a$  e  $\gamma$ .
- Siano  $A$  e  $B$  i punti stazionari, rispettivamente, dei grafici  $\varphi_a$  e  $\gamma$ , con  $x_A \neq 0$  e  $x_B > 0$ . Determinare il valore di  $a$  in corrispondenza del quale la misura del segmento  $AB$  risulti minima.

D'ora in avanti, si ponga  $a = \frac{1}{8}$ .

- Studiare le funzioni  $f_{\frac{1}{8}}$  e  $g$ , esaminandone in particolare la continuità e la derivabilità, e tracciare i loro grafici  $\varphi_{\frac{1}{8}}$  e  $\gamma$  in un medesimo sistema di riferimento. Utilizzare tali grafici per risolvere la disequazione  $f_{\frac{1}{8}}(x) > g(x)$ .
- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalle rette parallele all'asse  $y$  passanti per i punti di flesso.

### Svolgimento

- Innanzitutto osserviamo che  $f_a$  è definita sull'insieme  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

[NB: si può osservare che si può scrivere la funzione in maniera "intelligente", osservando che:

$$f_a(x) = \frac{a(x^2-1+1)}{x-1} = \frac{a[(x+1)(x-1)+1]}{x-1} = a \left( x + 1 + \frac{1}{x-1} \right)$$

Questa scrittura può semplificare alcuni passaggi. Vediamo i calcoli nel caso in cui non si sia fatta questa osservazione; in colore annotiamo alcuni punti in cui questa scrittura risulta particolarmente comoda.

In particolare, la derivata di  $f_a$  scritta in questa forma risulta scritta come  $f'_a(x) = a \left( 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \right)$ .]

La funzione  $f_a$  è derivabile con derivata:

$$f'_a(x) = \frac{2ax(x-1) - ax^2}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 - 2ax}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-2)}{(x-1)^2}$$

Studiamone il segno.

Il denominatore è sempre positivo.

Il numeratore si annulla per  $x = 0$  e  $x = 2$ .

Il segno del numeratore dipende dal segno di  $a$ , che determina la concavità della parabola  $y = ax(x-2)$ :

- se  $a > 0$  abbiamo che  $f'_a(x) > 0$  per  $x < 0 \vee x > 2$  e  $f'_a(x) < 0$  per  $0 < x < 2, x \neq 1$ .
- se  $a < 0$  abbiamo che  $f'_a(x) > 0$  per  $0 < x < 2, x \neq 1$  e  $f'_a(x) < 0$  per  $x < 0 \vee x > 2$ .

Ne deduciamo che la monotonia della funzione  $f_a$  al variare di  $a$ :

- se  $a > 0$ , allora  $f$  è crescente per  $x < 0 \vee x > 2$ ; è decrescente per  $0 < x < 1$  e per  $1 < x < 2$ .
- se  $a < 0$ , allora  $f$  è crescente per  $0 < x < 1$  e per  $1 < x < 2$ ; è decrescente per  $x < 0 \vee x > 2$ .

Affinché le funzioni abbiano tangente orizzontale, la derivata deve essere nulla.

- **Funzione  $f_a$ .**

Abbiamo già visto che la funzione si annulla per  $x = 0$  e  $x = 2$ . Calcoliamo il valore della funzione per questi valori di  $x$ :

$$f_a(0) = 0 \quad f_a(2) = 4a$$

Allora la retta  $r$  è tangente a  $\varphi_a$  per  $k = 0$  e per  $k = 4a$ .

- **Funzione  $g$ .**

Osserviamo che  $g$  è una funzione definita su tutto  $\mathbb{R}$ , è continua (perché i limiti da sinistra e destra per  $x \rightarrow 0$  sono uguali e altrove è ottenuta con operazioni tra funzioni continue. Inoltre, si tratta di una funzione pari. Allora possiamo considerarla per  $x > 0$  e dedurre di conseguenza il comportamento per  $x < 0$ , trattando  $x = 0$  a parte.

Deriviamo  $g$  per  $x > 0$ :

$$g'(x) = \frac{x^2+1-x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \text{ per } x > 0$$

La derivata di una funzione pari è dispari, quindi:

$$g'(x) = \frac{x^2+1-x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} \text{ per } x < 0$$

Valutiamo se  $g$  è derivabile in  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = -1$$

La funzione  $g$  non è perciò derivabile in  $x = 0$ , dove ha un punto angoloso.

Cerchiamo i punti stazionari di  $g$ :

- per  $x > 0$ :  $g'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0$  per  $x = 1$
- per  $x < 0$ , per simmetria,  $g'(x) = 0$  per  $x = -1$

Poiché  $g(-1) = g(1) = \frac{1}{2}$ , la retta  $r$  è tangente a  $\gamma$  per  $k = \frac{1}{2}$ .

Affinché la retta sia tangente sia a  $\varphi_a$  sia a  $\gamma$ , deve perciò valere che  $k = \frac{1}{2} = 4a$ , cioè  $a = \frac{1}{8}$  e  $k = \frac{1}{2}$ .

b) Il punto  $A$  è  $(2; 4a)$  e il punto  $B$  è  $(1; \frac{1}{2})$ .

Poiché l'unica variabile è l'ordinata di  $A$ , la distanza sarà minima quando i due punti hanno uguale ordinata. Ciò accade per  $4a = \frac{1}{2}$ , cioè per  $a = \frac{1}{8}$ , che è il valore ottenuto già al punto a. proprio imponendo che i due grafici abbiano la stessa retta come tangente orizzontale in questi due punti.

Si può procedere anche sviluppando i conti sulla lunghezza, come segue.

La lunghezza di  $AB$  è minima quando lo è la lunghezza di  $AB^2$ . Allora scriviamo la funzione  $q(a)$  che esprime questa lunghezza al quadrato:

$$q(a) = (1-2)^2 + \left(4a - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(16a^2 + \frac{1}{4} - 4a\right) = 16a^2 - 4a + \frac{5}{4}$$

Deriviamo  $q$  e cerchiamo quando si annulla la derivata:

$$q'(a) = 32a - 4$$

$$q'(a) = 0 \text{ per } 32a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

c) Studiamo le due funzioni  $f_{\frac{1}{8}}$  e  $g$ .

- $f_{\frac{1}{8}}(x) = \frac{x^2}{8(x-1)}$

- **Dominio:**  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

- **Simmetrie:** non è né pari né dispari. (Si può osservare che è dispari se la si trasla ponendo  $x' = x - 1$ ).

- **Continuità:** è continua nel suo dominio.
- **Intersezione con gli assi:** il punto (0; 0).
- **Segno:** il numeratore è positivo. Vale  $f_{\frac{1}{8}}(x) > 0$  per  $x - 1 > 0$ , cioè per  $x > 1$ . Viceversa,  $f_{\frac{1}{8}}(x) < 0$  per  $x < 1$ .

- **Calcolo dei limiti agli estremi del dominio**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{8(x-1)} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{8(x-1)} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x^2}{8(x-1)} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x^2}{8(x-1)} \right) = -\infty$$

- **Ricerca di eventuali asintoti**

La funzione presenta un asintoto verticale, che è  $x = 1$ . Non ha, invece, asintoti orizzontali. Ci aspettiamo che abbia asintoti obliqui, perché il numeratore è di 1 grado superiore al denominatore. Lo verifichiamo.

[NB: se scrive

$$f_{\frac{1}{8}}(x) = \frac{1}{8} \left( x + 1 + \frac{1}{x-1} \right)$$

è immediato dedurre che  $y = \frac{1}{8}(x + 1)$  è asintoto obliquo. ]

Poiché:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left( \frac{x^2}{8(x-1)} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{8x(x-1)} \right) = \frac{1}{8}$$

possiamo cercare un eventuale asintoto sinistro e destro con coefficiente angolare  $\frac{1}{8}$ .

Calcoliamo ora:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{8(x-1)} - \frac{x}{8} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{8(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{8(x-1)} = \frac{1}{8}$$

da cui confermiamo l'esistenza dell'asintoto obliquo  $y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$  (sinistro e destro) per la funzione.

- **Derivabilità**

Abbiamo già visto che la funzione è derivabile sul suo dominio.

- **Studio della monotonia**

Dal punto a. abbiamo visto che, poiché  $a > 0$ , si ha che  $f$  è crescente per  $x < 0 \vee x > 2$ ; è decrescente per  $0 < x < 1$  e per  $1 < x < 2$ .

- **Determinazione di massimi e minimi**

Abbiamo già visto che si hanno punti stazionari per  $x = 0$  e  $x = 2$ . Dallo studio della monotonia della funzione, abbiamo che abbiamo un massimo per  $x = 0$  (con  $y = 0$ ) e un minimo per  $x = 2$  (con  $y = \frac{1}{2}$ ).

- **Studio della convessità** (non espressamente richiesta dal testo dell'esercizio)

[NB: se si scrive  $f'_{\frac{1}{8}}(x) = \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \right)$ , la derivata seconda è più semplice da calcolare:

$$f''(x) = \frac{1}{8} \left( \frac{2}{(x-1)^3} \right) = \frac{1}{4(x-1)^3} ]$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{8(2x-2)(x-1)^2 - 16(x-1)(x^2-2x)}{64(x-1)^4} = \\ &= \frac{(x-1)[(x-1)^2 - (x^2-2x)]}{4(x-1)^4} = \\ &= \frac{(x^2-2x+1-x^2+2x)}{4(x-1)^3} = \frac{1}{4(x-1)^3} \end{aligned}$$

Vale che  $f''_{\frac{1}{8}}(x) > 0$  per  $x > 1$ , dove la funzione è convessa. La funzione è concava per  $x < 1$ .

- $g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$

- **Dominio:**  $\mathbb{R}$
- **Simmetrie:** pari
- **Continuità:** è continua nel suo dominio.
- **Intersezione con gli assi:** il punto  $(0; 0)$ .
- **Segno:** è ovunque positiva, tranne per  $x = 0$  dove è nulla.
- **Calcolo dei limiti agli estremi del dominio**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{|x|}{x^2+1} \right) = 0$$

- **Ricerca di eventuali asintoti**  
La funzione presenta un asintoto orizzontale, che è  $x = 0$ .  
Non ha altri asintoti.

- **Derivabilità**

La funzione è derivabile su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Abbiamo già visto che, invece, in  $x = 0$  la funzione  $g$  ha un punto angoloso, perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = -1.$$

- **Studio della monotonia**

Consideriamo inizialmente solo  $x > 0$ . Abbiamo calcolato che vale  $g'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$  per  $x > 0$ .

Questa funzione è positiva per  $0 < x < 1$  e negativa per  $x > 1$ .

Ne deduciamo, sfruttando la simmetria della funzione, che  $g$  cresce per  $x < 1$ , poi decresce per  $-1 < x < 0$ , cresce ancora per  $0 < x < 1$  e decresce per  $x > 1$ .

- **Determinazione di massimi e minimi**

Abbiamo già visto che si hanno punti stazionari per  $x = \pm 1$  (con  $y = \frac{1}{2}$ ). Dallo studio della monotonia della funzione, si tratta di due massimi assoluti.

Poiché inoltre la funzione è non negativa, per  $x = 0$  ha un minimo assoluto (con  $y = 0$ ).

- **Studio della convessità** (non espressamente richiesta dal testo dell'esercizio)

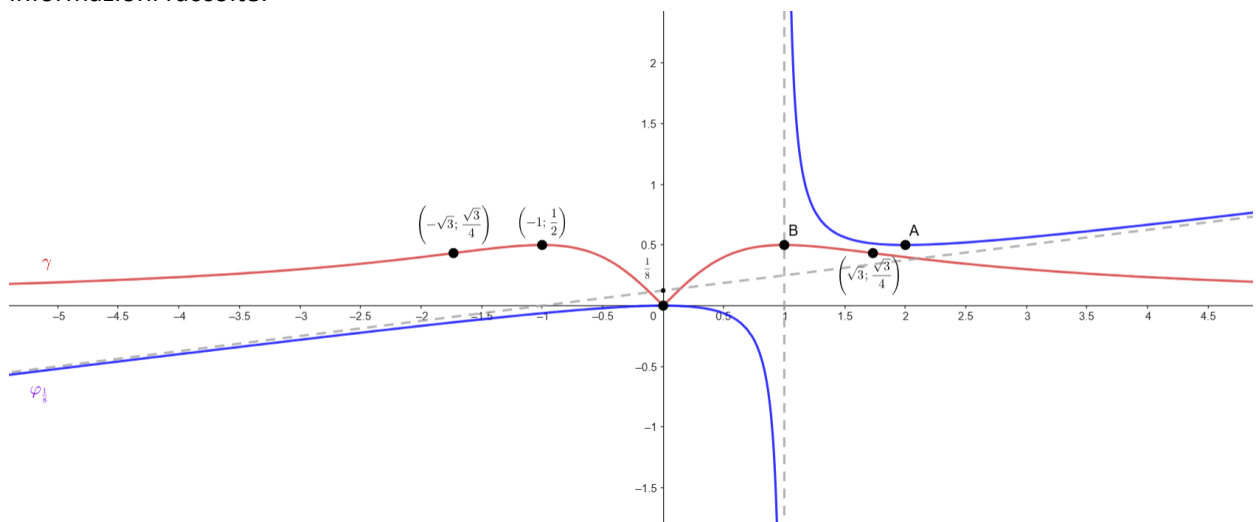
Anche in questo caso partiamo considerando solo  $x > 0$ .

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - 4x(1 - x^2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \\
 &= \frac{-2x(x^2 + 1)[x^2 + 1 + 2(1 - x^2)]}{(x^2 + 1)^4} = \\
 &= \frac{-2x(x^2 + 1 + 2 - 2x^2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}
 \end{aligned}$$

Il denominatore è sempre positivo e il fattore  $2x$  è positivo sull'insieme che stiamo considerando. Allora  $g''(x) > 0$  per  $x > \sqrt{3}$ , dove la funzione è perciò convessa. Di conseguenza, sarà anche convessa per simmetria per  $x < -\sqrt{3}$  e invece sarà concava per  $-\sqrt{3} < x < 0 \vee 0 < x < \sqrt{3}$ .

Abbiamo dei flessi per  $x = \pm\sqrt{3}$  (dove  $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ).

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le due funzioni  $f_{\frac{1}{8}}$  e  $g$ , mettendo insieme tutte le informazioni raccolte:



Graficamente osserviamo che vale  $f_{\frac{1}{8}}(x) > g(x)$  per  $x > 1$ .

Osserviamo che, se anche il disegno non fosse perfetto, nell'intervallo  $(1, +\infty)$  il minimo valore di  $f_{\frac{1}{8}}$  lo si ha nel punto A, mentre il massimo di  $g$  lo si ha nel punto B: i grafici delle due funzioni non si possono intersecare in questo intervallo e  $f_{\frac{1}{8}}$  rimane sempre superiore a  $g$ .

Per  $x < 1$ , invece, essendo  $g$  positiva e  $f$  negativa o al massimo nulla, vale sempre  $g(x) \geq f_{\frac{1}{8}}(x)$ .

- d) Calcoliamo l'area  $A$  della regione finita di piano delimitata da  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalle rette parallele all'asse  $y$  passanti per i punti di flesso, che hanno equazione  $x = \pm\sqrt{3}$ . Per farlo, nota la simmetria di  $g$ , possiamo calcolare il doppio dell'integrale di  $g$  tra 0 e  $\sqrt{3}$ :

$$A = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 + 1} dx = 2 \left[ \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^{\sqrt{3}} = \ln 4$$