

Problema 1

In tabella sono indicati i rilevamenti, fatti a inizio anno a partire dal 2016, del livello dell'acqua del lago di Bracciano. Nel 2016 e nel 2017 il lago, oggetto di prelievi, era utilizzato come riserva idrica di emergenza per i comuni limitrofi e per l'approvvigionamento di Roma. Nel 2017, in considerazione dell'impatto ambientale e del notevole abbassamento del livello idrometrico rispetto a quello considerato ottimale, si è deciso di interrompere i prelievi, sospensione tuttora in atto.

Anno	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Differenza del livello rispetto allo zero idrometrico (in dm)	-6	-16	-20	-18	-16	-14	-12	-10	-10	-10	-10

Si scelga un sistema di riferimento in cui l'unità, sull'asse delle ascisse, corrisponda all'arco temporale di un anno e il 1° gennaio 2016 allo zero, mentre sull'asse delle ordinate l'unità corrisponda a una differenza di 1 dm rispetto allo zero idrometrico (livello ottimale).

Con buona approssimazione, dall'inizio del 2016 fino all'inizio del 2019, si può descrivere l'andamento del livello delle acque con il modello polinomiale:

$$y = a(x - 2)^4 + b(x - 2)^3 + c(x - 2)^2 - 20 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Nel periodo tra l'inizio del 2019 e l'inizio del 2023 si assume una crescita oscillante, approssimata con un modello del tipo $y = mx - 24 + \sin^2(\pi x)$ con $m \in \mathbb{R}$. Poi, fino all'inizio del 2026, l'andamento può essere approssimato con un modello del tipo $y = 2 \cos(2\pi x) + k$, con $k \in \mathbb{R}$.

- a) Utilizzando i dati riportati in tabella e le informazioni fornite, definire il modello matematico $f(x)$ che esprime l'andamento del livello delle acque del lago in funzione del tempo, dopo aver determinato i valori dei parametri.

Si assuma come modello descrittivo dell'andamento idrometrico del lago la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x - 2)^4 - (x - 2)^3 + \frac{7}{2}(x - 2)^2 - 20 & 0 \leq x < 3 \\ 2x - 24 + \sin^2(\pi x) & 3 \leq x \leq 7 \\ 2 \cos(2\pi x) - 12 & 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

- b) Studiare f e tracciare un suo grafico, dopo aver verificato la continuità, studiato la derivabilità e determinato i punti di estremo relativo.
- c) Giustificare la non applicabilità del teorema di Lagrange alla funzione f in $[0, 10]$. Esistono, tuttavia, punti di ascissa $s \in (0, 10)$ tali che $f'(s) = \frac{f(10) - f(0)}{10}$?
- d) Spiegare perché il teorema della media integrale è applicabile alla funzione f in $[0, 10]$. Calcolare, quindi, la variazione media Δh del livello delle acque del lago negli anni presi in esame.

Infine, considerando che la superficie del lago è di circa 57 km^2 , utilizzare Δh per stimare, in litri, la differenza del volume di acqua tra l'inizio del 2016 e l'inizio del 2026.

Svolgimento

- a) Il modello matematico $f(x)$ che descrive l'andamento del livello delle acque del lago in funzione del tempo è della forma:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 - 20 & 0 \leq x \leq 3 \\ mx - 24 + \sin^2(\pi x) & 3 \leq x \leq 7 \\ 2 \cos(2\pi x) + k & 7 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Dobbiamo trovare i valori dei parametri per cui i valori $f(0)$, $f(1)$, ... $f(10)$ sono quelli riportati in tabella.

Concentriamoci sui primi quattro valori:

$$f(0) = (-2)^4 a + (-2)^3 b + (-2)^2 c - 20 = -6$$

$$f(1) = a - b + c - 20 = -16$$

$$f(2) = -20$$

$$f(3) = a + b + c - 20 = -18$$

L'informazione $f(2) = -20$ non ci fornisce alcuna informazione sui parametri a , b e c . Gli altri tre valori ci permettono di impostare il sistema:

$$\begin{cases} 16a - 8b + 4c = 14 \\ a - b + c = 4 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8a - 4b + 2c = 7 \\ a - b + c = 4 \\ -2b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8a + 4 + 6 - 2a = 7 \\ c = 3 - a \\ b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6a = -3 \\ c = 3 - a \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{7}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

Il primo tratto di f è quindi: $-\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20$ per $0 \leq x < 3$.

Il secondo tratto di f deve verificare:

$$f(3) = 3m - 24 + \sin^2(3\pi) = 3m - 24 = -18 \rightarrow m = 2$$

Avremmo ottenuto lo stesso valore di m imponendo che $f(4) = -16$, $f(5) = -14$, $f(6) = -12$, $f(7) = -10$.

Lo stesso per quanto riguarda il terzo tratto della funzione: ci basta risolvere:

$$f(7) = 2 \cos(14\pi) + k = 2 + k = -10 \rightarrow k = -12$$

Ricaviamo quindi il modello:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20 & 0 \leq x < 3 \\ 2x - 24 + \sin^2(\pi x) & 3 \leq x < 7 \\ 2 \cos(2\pi x) - 12 & 7 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

che è lo stesso indicato dal testo del problema.

- b) La funzione ha come dominio l'intervallo $[0, 10]$ ed è continua per costruzione. Inoltre, in tutti i punti del dominio eccetto $x = 3$ e $x = 7$, la funzione è derivabile in quanto somma di funzioni derivabili. Per verificare la derivabilità in $x = 3$ e $x = 7$ utilizziamo il corollario del teorema di de l'Hôpital: se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, allora esiste anche $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e tali limiti sono uguali.

Pertanto, per verificare la derivabilità in $x = 3$ confrontiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2)) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2 + 2\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)) = 2$$

I due limiti sono uguali, quindi f è derivabile in $x = 3$ e si ha $f'(3) = 2$.

Procediamo in modo analogo per verificare la derivabilità in $x = 7$:

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} (2 + 2\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} -4\pi \operatorname{sen}(2\pi x) = 0$$

Dato che il limite destro e il limite sinistro sono diversi, concludiamo che f non è derivabile in $x = 7$, in cui presenta un punto angoloso.

Studiamo i punti di estremo relativo mediante il segno di f' .

Per $0 \leq x \leq 3$ si ha:

$$f'(x) > 0 \rightarrow -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) > 0$$

Poniamo per comodità $t = x - 2$ e ci riconduciamo allo studio di:

$$t(-2t^2 - 3t + 7) > 0$$

nell'intervallo $0 \leq x \leq 3 \rightarrow -2 \leq t \leq 1$.

La funzione si annulla per $t = 0$ e $t = \frac{3 \pm \sqrt{9+56}}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4}$. Dato che $\sqrt{65} > 8$, possiamo stimare queste due soluzioni in questo modo:

- $\frac{-3 + \sqrt{65}}{4} > \frac{5}{4} > 1$;
- $\frac{-3 - \sqrt{65}}{4} < -\frac{11}{4} < -2$.

Di conseguenza, il segno di $-2t^2 - 3t + 7$ è costante in $[-2, 1]$; in particolare, calcolando ad esempio il valore per $t = 0$ ricaviamo che $-2t^2 - 3t + 7$ è positiva sull'intervallo considerato. Tornando alla variabile x , ricaviamo che $f'(x)$ ha lo stesso segno di $x - 2$: è negativa per $0 < x < 2$ ed è positiva per $2 < x < 3$. Quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo e $x = 2$ è un punto di minimo relativo.

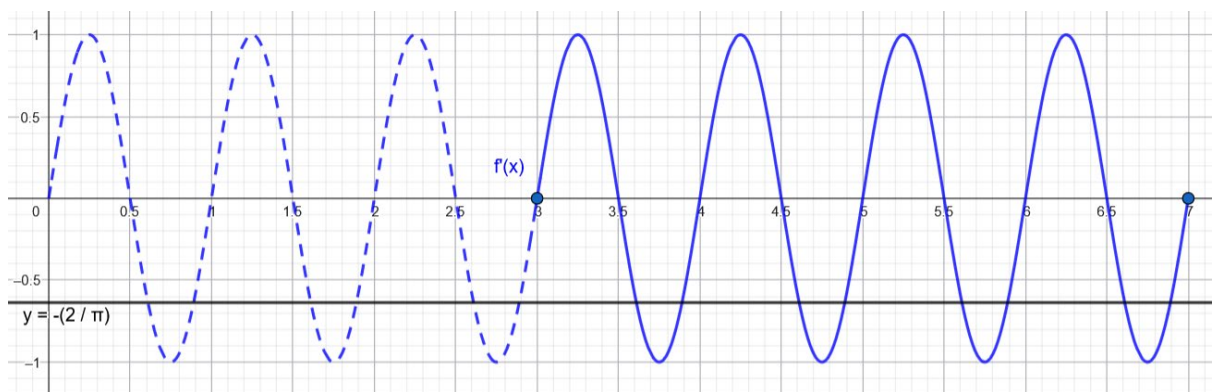
Per $3 \leq x \leq 7$ si ha:

$$f'(x) > 0 \rightarrow 2 + 2\pi \operatorname{sen}(\pi x) \cos(\pi x) > 0$$

Per risolvere la disequazione ci conviene riscrivere $\operatorname{sen}(\pi x) \cos(\pi x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi x)$:

$$\operatorname{sen}(2\pi x) > -\frac{2}{\pi}$$

Rappresentiamo la situazione con un grafico. Indichiamo, per comodità, il prolungamento di $\operatorname{sen}(2\pi x)$ anche per $0 \leq x \leq 3$:



Dal grafico ricaviamo più facilmente la soluzione di $\operatorname{sen}(2\pi x) < -\frac{2}{\pi}$ per $x \in [0, 1]$:

$$\pi + \arcsin\left(\frac{2}{\pi}\right) < 2\pi x < 2\pi - \arcsin\left(\frac{2}{\pi}\right) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{2}{\pi}\right) < x < 1 - \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

La soluzione di $f'(x) < 0$ per $x \in [3, 7]$ è quindi:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \arcsen\left(\frac{2}{\pi}\right) + h < x < 1 - \frac{1}{2\pi} \arcsen\left(\frac{2}{\pi}\right) + h \quad \text{con } h = 3, 4, 5, 6$$

Otteniamo i punti di massimo relativo in:

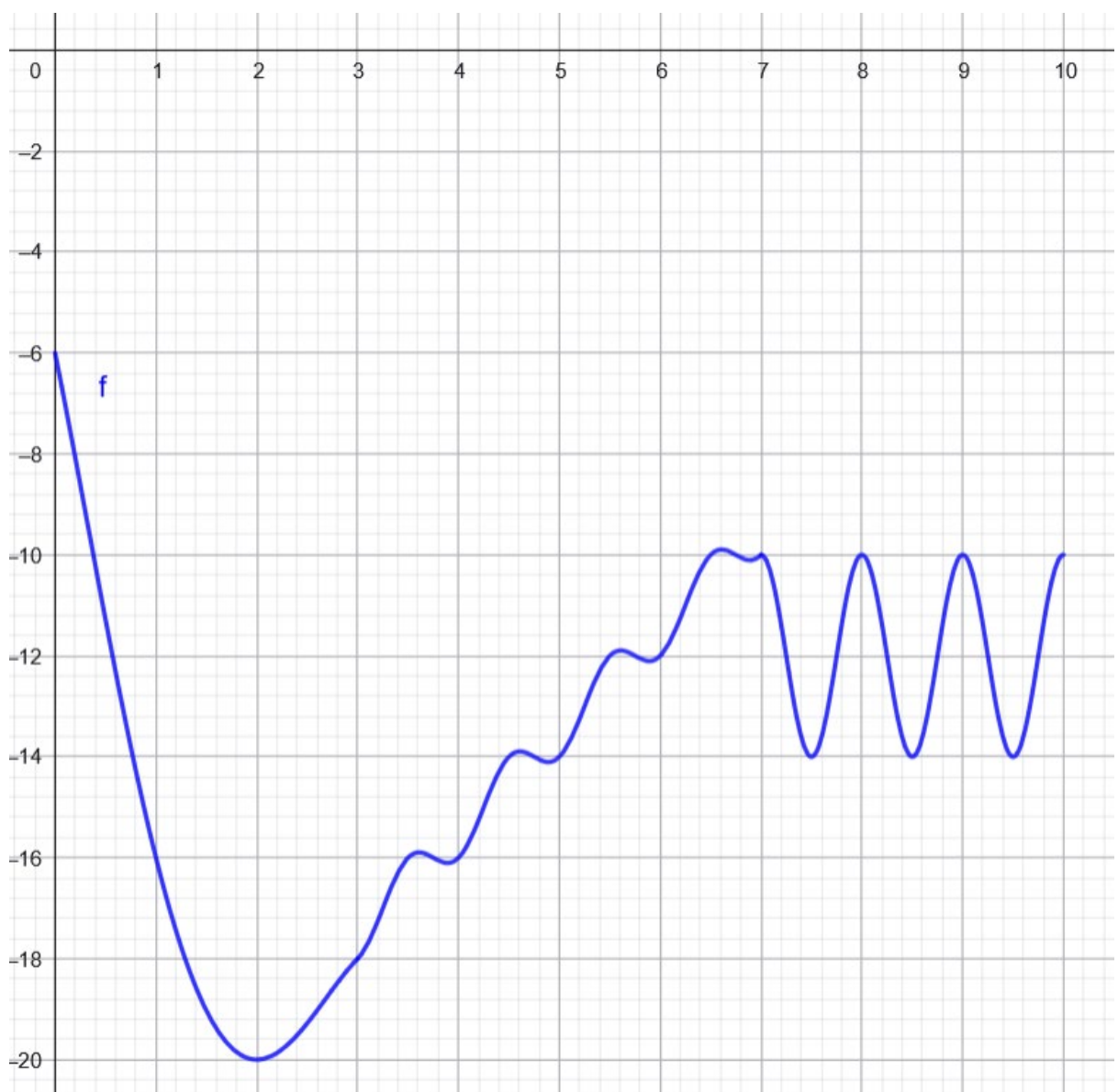
$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \arcsen\left(\frac{2}{\pi}\right) + h \quad \text{con } h = 3, 4, 5, 6$$

e i punti di minimo relativo in:

$$1 - \frac{1}{2\pi} \arcsen\left(\frac{2}{\pi}\right) + h \quad \text{con } h = 3, 4, 5, 6$$

Per $7 \leq x \leq 10$ la funzione ha massimi e minimi in corrispondenza dei massimi e minimi di $y = \cos(2\pi x)$. Quindi i punti di massimo relativo sono $x = 7, x = 8, x = 9, x = 10$, mentre i punti di minimo relativo sono $x = 7,5, x = 8,5, x = 9,5$.

Il grafico qualitativo di f è:



c) La funzione non è derivabile in $(0, 10)$, quindi non le si può applicare il teorema di Lagrange.

Calcoliamo: $\frac{f(10)-f(0)}{10} = \frac{-10-(-6)}{10} = -\frac{4}{10} = -0,4$. Nell'intervallo $(7, 10]$ $f'(x) =$

$-4\pi \sin(2\pi x)$ è continua e, per il teorema dei valori intermedi, assume tutti i valori nell'intervallo $[-4\pi, 4\pi]$, che include anche 0,4.

d) Dato che la funzione è continua, le si può applicare il teorema della media.

La media integrale di f è:

$$M = \frac{1}{10} \int_0^{10} f(x) dx$$

È utile esprimere l'integrale di f sull'intervallo $[0, 10]$ come somma dell'integrale di f su ciascuno degli intervalli $[0, 3]$, $[3, 7]$, $[7, 10]$:

$$\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^7 f(x) dx + \int_7^{10} f(x) dx$$

Calcoliamo i tre integrali separatamente:

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^3 -\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20 dx = \\ &= \left(-\frac{1}{10}(x-2)^5 - \frac{1}{4}(x-2)^4 + \frac{7}{6}(x-2)^3 - 20x\right) \Big|_0^3 = -\frac{2943}{60} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_3^7 f(x) dx &= \int_3^7 2x - 24 + \sin^2(\pi x) dx = \\ &= \left(x^2 - 24x + \frac{1}{2}x - \frac{\sin(4\pi x)}{8\pi}\right) \Big|_3^7 = -54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_7^{10} f(x) dx &= \int_7^{10} 2 \cos(2\pi x) - 12 dx = \\ &= (-12x) \Big|_7^{10} = -36 \end{aligned}$$

La media integrale è quindi:

$$M = \frac{1}{10} \left(-\frac{2943}{60} - 54 - 36\right) = -\frac{8343}{600} = -\frac{2781}{200} \approx -14 \text{ dm}$$

Per "variazione media del livello delle acque" si può intendere:

- la variazione media del livello delle acque rispetto allo zero igrometrico, che è -14 dm;
- la variazione media dell'altezza del lago, quindi la variazione media di f , sui 10 anni:

$$\frac{f(10)-f(0)}{10} = \frac{-10-(-6)}{10} = -0,4 \text{ dm/anno}$$

Per calcolare la differenza di volume di acqua basta valutare la differenza di altezza fra l'anno 2026 e l'anno 2016, pari a -4 dm, e moltiplicarla per la superficie del lago:

$$\Delta V = -4 \cdot 57 \cdot 10^8 \text{ dm}^3 = -228 \cdot 10^5 \text{ m}^3$$

Questo risultato si può anche ottenere moltiplicando la variazione suddetta $\Delta h = -0,4$ dm/anno, per il numero di anni e moltiplicando per la superficie:

$$\Delta V = -0,4 \frac{\text{dm}}{\text{anno}} \cdot 10 \text{ anni} \cdot 57 \cdot 10^8 \text{ dm}^3 = -228 \cdot 10^5 \text{ m}^3$$