

Coerenza



La matematica in gioco

Parliamo di... *mondi possibili* matematici

In matematica si può:

- definire un **nuovo oggetto** (numero o figura) e scoprire quali sono le sue caratteristiche (problemi 1, 2);
- definire una **nuova regola** e applicarla per scoprire quali risultati si possono ottenere (problema 3);
- definire una **nuova situazione** con **le sue regole** (mondo possibile) in cui risolvere problemi (problemi 4, 5, 6).

PROBLEMA 1 NUMERO EQUILIBRATO**Definizione**

Un numero di 3 cifre si dice **equilibrato** quando la prima cifra è uguale alla media delle altre due.

Per esempio:

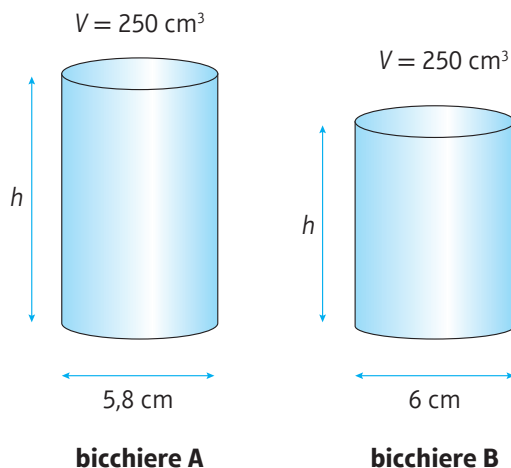
- 555 è equilibrato perché $5 = \frac{5 + 5}{2}$
- 471 è equilibrato perché $4 = \frac{7 + 1}{2}$
- 360 è equilibrato perché $3 = \frac{6 + 0}{2}$
- 714 non è equilibrato perché 7 non è uguale a $\frac{1 + 4}{2}$
- 3141 non è equilibrato perché non è formato da 3 cifre

- Qual è il più grande numero equilibrato?
- Qual è il più piccolo numero equilibrato?
- Scrivi tutti i numeri equilibrati che iniziano con la cifra 3.

**PROBLEMA 2 BICCHIERE ELEGANTE****Definizione**

Un bicchiere cilindrico è tanto più **elegante** quanto più il rapporto tra la sua altezza e il suo diametro si avvicina al numero 1,618.

I due bicchieri nella figura hanno lo stesso volume, ma diametri e altezze diversi.



In base alla definizione data, quale di essi è il più elegante?

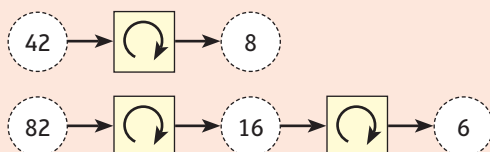
PROBLEMA 3 LA MACCHINA DEI NUMERI

Un matematico ha inventato una macchina che riceve un numero naturale in ingresso e lo trasforma in un altro numero in uscita applicando una regola.

Regola

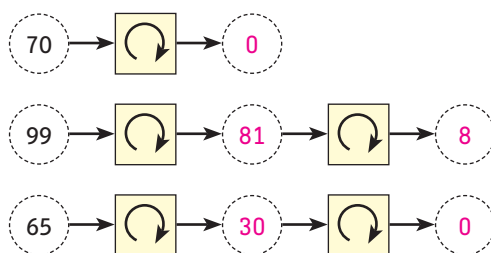
Ogni volta che si introduce un numero, la macchina calcola il **prodotto delle sue cifre**, poi prende il nuovo numero e **ripete l'operazione fino a quando** ottiene **un numero di una cifra**.

Ecco due esempi:

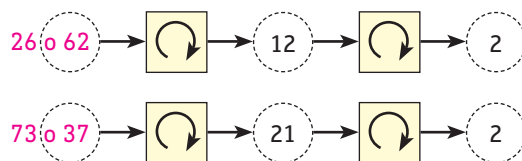


Osserva i seguenti schemi e rispondi alle richieste.

a. Scrivi i numeri nei cerchi vuoti.



b. Quali numeri minori di 100 potrebbero stare nei cerchi vuoti?



c. Trova un numero minore di 100 che richiede tre passaggi per produrre un numero di una sola cifra.



d. Qual è il più grande numero minore di 100 che richiede un solo passaggio nella macchina?



e. Esiste solo numero minore di 100 che richiede 4 passaggi per ottenere un numero di una cifra. Qual è?



PROBLEMA 4 LE BANCONOTE DI KOMAR

Gli abitanti del pianeta Komar usano soltanto banconote da 5 Denari e 7 Denari.

- Se devi pagare una pizza che costa 8 Denari, qual è l'importo minimo che devi dare alla cassiera per ottenere il resto? La pizzeria ha molte banconote da 5 e 7 Denari per poter dare il resto a tutti i clienti.
- Le macchine distributrici automatiche su Komar non danno il resto. In queste macchine si può usare il numero 19 come prezzo? E il numero 18?
- Quali sono i numeri interi che si possono usare come prezzi su queste macchine?

(Adattato da: *Olimpiada Brasileira de matematica, 2014*)

PROBLEMA 5 IL ROBOT

Un robot programmabile è capace di muoversi sul piano eseguendo i seguenti semplici comandi:

- A n** = vai avanti di n passi (dove n è un numero intero);
- D** = ruota a destra di 90° ;
- S** = ruota a sinistra di 90° ;

La **figura 1** mostra il percorso compiuto dal robot che è partito dal punto P e ha eseguito i 7 comandi:

A6, D, A2, S, A1, D, A1

Quali altri 12 comandi si devono dare al robot per fargli completare il percorso come illustrato **figura 2**?

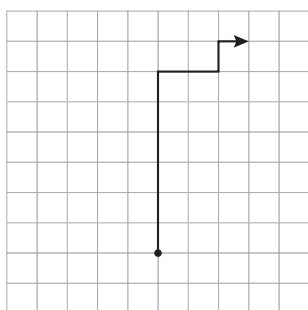


figura 1

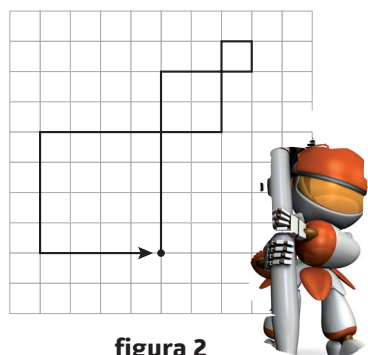


figura 2

PROBLEMA 6 LA SPADA DELLA CONOSCENZA

Il Drago dell'Ignoranza ha tre teste e tre code.

Puoi sconfiggerlo con la Spada della Conoscenza, tagliando tutte le sue teste e tutte le sue code.

Ma sconfiggere il drago non è semplice, perché ci sono delle regole da seguire!

Regole della spada	Regole del drago
Con un colpo di spada, puoi tagliare a ogni colpo, a tua scelta: • una testa • una coda • due teste • due code	• Se tagli una testa, ricresce una testa. • Se tagli una coda, crescono due code. • Se tagli due code, cresce una testa. • Se tagli due teste, non succede nulla. <i>Per esempio, se al primo colpo tagli una coda allora il drago perde una coda ma gli crescono altre due code, quindi ha 3 teste e 4 code.</i>

Quanti e quali tagli devi fare come minimo per eliminare il drago?



Per approfondire

La coerenza in matematica

In matematica c'è la libertà di inventare nuove definizioni, regole e teorie ma c'è un obbligo importante da rispettare: l'insieme di tutte le proposizioni che formano una teoria deve essere **coerente**. Un insieme di proposizioni è coerente se non contiene proposizioni che si contraddicono l'una con l'altra. Altrimenti è **incoerente**. Vediamo due esempi.

Insieme di proposizioni coerente

1. Fabio è più basso di Dario.
2. Dario è più alto di Enzo.
3. Fabio è più basso di Enzo.

- Disegniamo un modello della situazione.



È possibile costruire un modello perché le proposizioni non si contraddicono fra loro.

Insieme di proposizioni incoerente

1. Alice è più alta di Barbara.
2. Chiara è più bassa di Barbara.
3. Chiara è più alta di Alice.

- Prova a ricostruire il modello della situazione. Ci riesci?



Non è possibile costruire un modello perché le proposizioni **1** e **2** contraddicono la **3**.

Un caso famoso

La geometria Euclidea è un insieme di proposizioni geometriche coerenti tra loro e coerenti con un insieme di proposizioni iniziali chiamate **postulati**. Se si cambia anche uno solo di questi postulati, bisogna riformulare tutte le proposizioni che ne derivano, in modo coerente.

È quanto è successo quando i matematici hanno provato a cambiare il quinto postulato di Euclide.

Quinto postulato di Euclide

Per un punto esterno a una retta data passa **una e una sola** retta parallela a essa.

Negazione 1 del quinto postulato

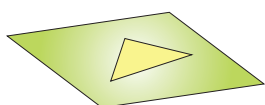
Per un punto esterno a una retta data **non passa nessuna** retta parallela a essa.

Negazione 2 del quinto postulato

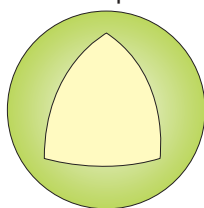
Per un punto esterno a una retta data **passa più di una** retta parallela a essa.

Se si sostituisce il quinto postulato con le sue negazioni si ottengono teorie geometriche completamente diverse da quella a cui siamo abituati. In queste **geometrie non euclidee** i triangoli possono essere curvi e i piani possono essere sfere o "selle": sembrano impossibili, ma sono coerenti!

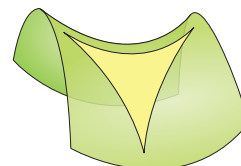
Geometria euclidea
Il piano è piatto.



Geometria non euclidea 1
Il piano è una superficie sferica.



Geometria non euclidea 2
Il piano è a forma di sella.



L'angolo della riflessione



Significati della parola “coerente”

Se cerchiamo in un vocabolario la parola “coerente”, scopriamo che è usata nelle scienze, nella matematica e anche per qualificare un comportamento umano. Si dice che **una persona è coerente con se stessa** quando agisce sempre in modo conforme alle proprie idee.

Se, invece, una persona dice una cosa e poi ne fa un'altra, allora è considerata **incoerente**. Pensa, per esempio, a qualcuno che dice «Vorrei proprio dimagrire!» mentre gusta un ricco dessert al cioccolato.



Le tue riflessioni...

1. Ripensando a quanto hai imparato in questo capitolo, fai un esempio di esercizio in cui si descrive una situazione fantastica con le sue regole, dove si deve risolvere un problema.

.....

.....

2. Quale caratteristica deve avere una teoria matematica per essere coerente?

.....

.....

3. Secondo te, perché in matematica è obbligatorio che una teoria sia coerente?

.....

.....

4. In matematica, che differenza c'è fra verità e coerenza?

.....

.....

5. Cosa significa il proverbio: «Predica bene e razzola male»?

.....

.....

